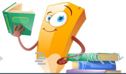
Chương 1. HÀM SỐ VÀ GIỚI HẠN

ThS. Nguyễn Thị Huyên

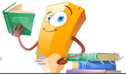
BM Toán Giải tích - Trường ĐHGTVT

Năm 2025

Mục lục



Chương 1. Hàm số và giới hạn



Định nghĩa 1.1.

Cho $X, Y \subset \mathbb{R}$. Một quy tắc f từ tập X sang tập Y với mỗi $x \in X$ bất kì cho tương ứng với một và chỉ một $y \in Y$ được gọi là một hàm số. Kí hiệu:

$$\begin{aligned} f : & X \longrightarrow Y \\ & x \longmapsto y = f(x) \end{aligned}$$

1. x gọi là đối số hay biến số độc lập,
2. y gọi là hàm số hay biến số phụ thuộc.
3. Tập X được gọi là tập xác định của hàm số và ký hiệu là D_f,
4. Tập $f(X) = \{y = f(x) \in Y | x \in D_f\} \subset Y \subset \mathbb{R}$ được gọi là tập giá trị của hàm số và ký hiệu là E_f.
5. Tập $G_f = \{M(x, y) | y = f(x), x \in D_f\}$ được gọi là đồ thị của hàm số $y = f(x)$. Nó thường là một đường cong trong mặt phẳng.

Chú ý 1.1.

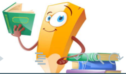
Khi cho một hàm số, người ta thường không cho luôn tập xác định, khi đó tập xác định của hàm số $f(x)$ được hiểu là:

$$D_f = \{x \in \mathbb{R} | y = f(x) \text{ có nghĩa } \}$$

và gọi là tập xác định tự nhiên của hàm số $f(x)$.

Ví dụ 1.1.

- Cho hàm số $y = f(x) = \dfrac{2}{x^2 - 3x + 2}$. Tập xác định của hàm số là $D_f = \{x \in \mathbb{R} | x^2 - 3x + 2 \neq 0\} = \mathbb{R} \backslash \{1, 2\}$.
- Cho hàm số $y = f(x) = \sqrt{x^2 - 5x + 6}$. Tập xác định của hàm số là $D_f = \{x \in \mathbb{R} | x^2 - 5x + 6 \geq 0\} = (-\infty, 2] \cup [3, +\infty)$.



Định nghĩa 1.2.

1. Hàm số $f(x)$ được gọi là hàm số tăng (đồng biến) trên khoảng (a, b) nếu $\forall x_1, x_2 \in (a, b)$ và $x_1 < x_2$ thì $f(x_1) < f(x_2)$.
2. Hàm số $f(x)$ được gọi là hàm số giảm (nghịch biến) trên khoảng (a, b) nếu $\forall x_1, x_2 \in (a, b)$ và $x_1 < x_2$ thì $f(x_1) > f(x_2)$.
3. Hàm số tăng (giảm) được gọi là hàm số đơn điệu.

Định nghĩa 1.3.

1. Hàm số $y = f(x)$ được gọi là hàm số chẵn trên tập X nếu với $\forall x \in X$ ta luôn có $-x \in X$ và $f(-x) = f(x)$.
2. Hàm số $y = f(x)$ được gọi là hàm số lẻ trên tập X nếu với $\forall x \in X$ ta luôn có $-x \in X$ và $f(-x) = -f(x)$.

Định nghĩa 1.4.

1. Hàm số $y = f(x)$ được gọi là bị chặn dưới trên tập X nếu tồn tại số thực m sao cho $f(x) \geq m, \forall x \in X$.
2. Hàm số $y = f(x)$ được gọi là bị chặn trên trên tập X nếu tồn tại số thực M sao cho $f(x) \leq M, \forall x \in X$.
3. Hàm số vừa bị chặn trên, vừa bị chặn dưới được gọi là bị chặn.

Ví dụ 1.2.

Hàm số $y = \sin x$ và $y = \cos x$ vừa bị chặn trên bởi 1, vừa bị chặn dưới bởi -1, nên chúng là các hàm bị chặn trên $\mathbb{R}$.
Hàm số $y = e^x$ bị chặn dưới bởi 0 và không bị chặn trên.

Hàm số hợp.

Định nghĩa 1.5.

Cho hai hàm số:

$$\begin{aligned} f : X &\longrightarrow U \\ x &\longmapsto u = f(x) \end{aligned} \quad \text{và} \quad \begin{aligned} g : U &\longrightarrow Y \\ u &\longmapsto y = g(u) \end{aligned}.$$

Khi đó xác định một hàm số $\begin{aligned} h : X &\longrightarrow Y \\ x &\longmapsto y = h(x) \end{aligned}$ theo quy luật $h(x) = g[f(x)]$ và được gọi là hàm số hợp của hai hàm số $y = g(u)$ và $u = f(x)$.

Ví dụ 1.3.

- Cho hàm số $y = \sin^5 x$, ta hiểu hàm số này là hợp của hai hàm số $y = u^5$ và $u = \sin x$.
- Cho hàm số $f(x) = x^2$ và $g(x) = 2^x$. Khi đó ta có :
  $f[g(x)] = (g(x))^2 = (2^x)^2 = 4^x$; $\quad g[f(x)] = 2^{f(x)} = 2^{x^2}$.

Hàm số ngược

Định nghĩa 1.6.

Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên X và nhận giá trị trên Y. Nếu với mọi $y_0 \in Y$ đều tồn tại duy nhất $x_0 = g(y_0) \in X$ thì g được gọi là hàm số ngược của hàm số f và ký hiệu là $g = f^{-1}$.

Hàm số đơn điệu (ngặt) trên X thì sẽ có hàm số ngược trên tập đó.
Theo thói quen sử dụng ký hiệu hàm số, chúng ta thường viết $y = f^{-1}(x)$ thay vì $x = f^{-1}(y)$.
Khi đó, chúng ta đã đổi vai trò của x và y, nên đồ thị của hai hàm số ngược nhau $y = f(x)$ và $y = f^{-1}(x)$ đối xứng với nhau qua đường thẳng $y = x$.

Ví dụ 1.4.

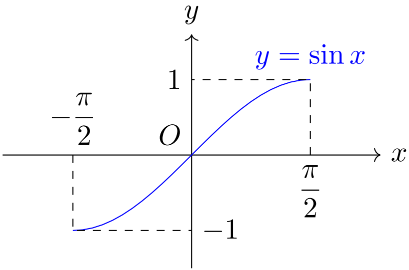
- Ta nói $y = \sqrt[3]{x}$ là hàm số ngược của hàm số $y = x^3$ trên $\mathbb{R}$.
- $y = e^x$ là hàm số ngược của hàm số $y = \ln x$ trên $\mathbb{R}^+ = \{x \in \mathbb{R} | x > 0\}$.

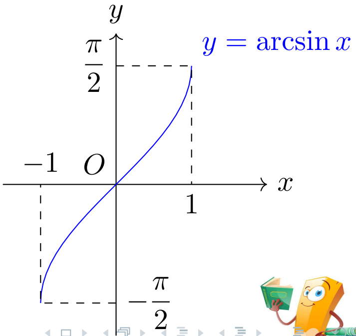
$$f = \sin : \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \longrightarrow [-1, 1]$$
$$x \longmapsto y = \sin x$$

là hàm tăng nên nó có hàm số ngược:

$$f^{-1} = \arcsin : [-1, 1] \longrightarrow \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$
$$x \longmapsto y = \arcsin x$$

$(y = \arcsin x \Leftrightarrow \sin y = x)$.

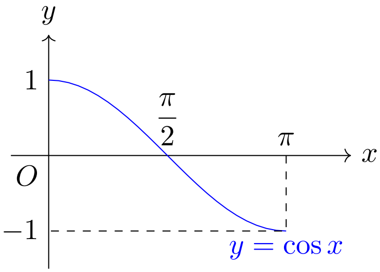


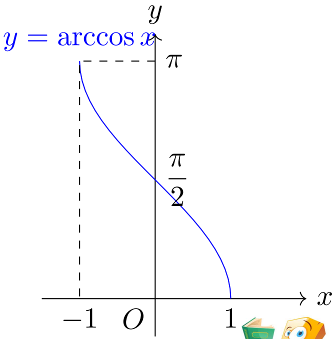


Hàm $y = \arccos x$

$$f = \cos : \begin{array}{rcl} [0, \pi] & \longrightarrow & [-1, 1] \\ x & \longmapsto & y = \cos x \end{array}$$ là hàm giảm nên nó có hàm số ngược:

$$f^{-1} = \arccos : \begin{array}{rcl} [-1, 1] & \longrightarrow & [0, \pi] \\ x & \longmapsto & y = \arccos x \end{array} \quad (y = \arccos x \Leftrightarrow \cos y = x).$$



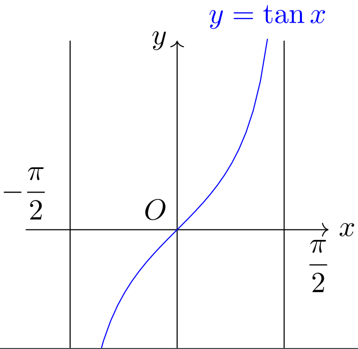


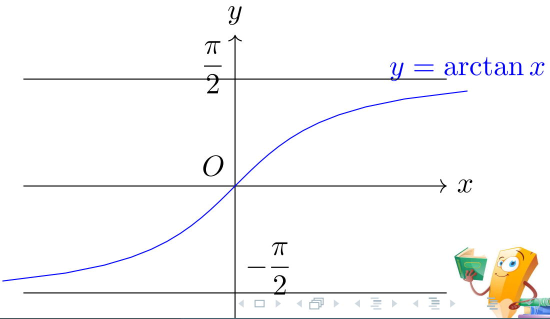
$$f = \tan : \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto y = \tan x$$

là hàm tăng nên nó có hàm số ngược:

$$f^{-1} = \arctan : \mathbb{R} \longrightarrow \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$$
$$x \longmapsto y = \arctan x$$

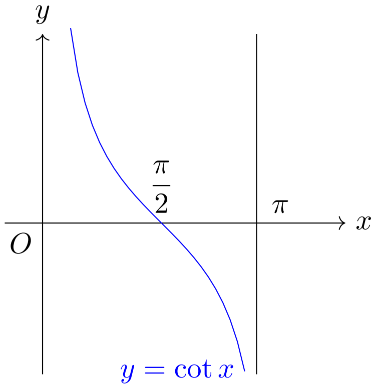
$(y = \arctan x \Leftrightarrow \tan y = x)$.

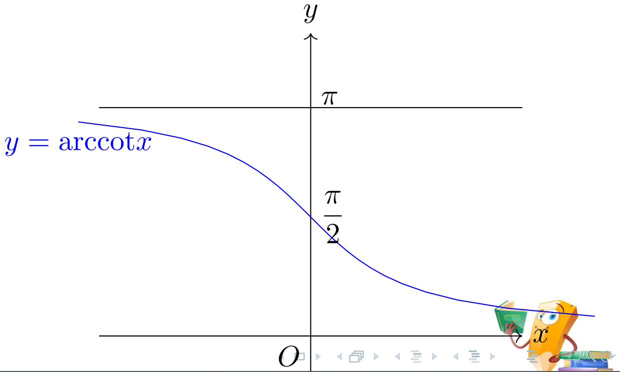




$$f = \cot : \begin{array}{l} (0,\pi) \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto y = \cot x \end{array}$$ là hàm giảm nên nó có hàm số ngược:

$$f^{-1} = \operatorname{arccot} : \begin{array}{l} \mathbb{R} \longrightarrow (0,\pi) \\ x \longmapsto y = \operatorname{arccot} x \end{array}$$ $(y = \operatorname{arccot} x \Leftrightarrow \cot y = x)$.





Các hàm sơ cấp

Ta gọi các nhóm hàm sau là hàm sơ cấp cơ bản:

1. Hàm lũy thừa $y = x^{\alpha}(\alpha \in \mathbb{R})$,
2. Hàm mũ $y = a^x, (0 < a \neq 1)$,
3. Hàm logarit $y = \log_a x, (0 < a \neq 1)$,
4. Hàm lượng giác $y = \sin x,\ y = \cos x,\ y = \tan x,\ y = \cot x$
5. Hàm lượng giác ngược $y = \arcsin x,\ y = \arccos x,\ y = \arctan x,\ y = arccotx$.

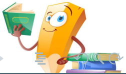
Các hàm số sơ cấp cơ bản cùng với các phép toán số học lấy tổng, hiệu, tích, thương và phép lấy hàm số hợp tạo thành một lớp các hàm số gọi là các hàm sơ cấp.

Ví dụ 1.5.

Hàm số sau là hàm sơ cấp: $y = \sin(x^2 + e^2) + \ln(3 + x)$.

Hàm số sau không phải là hàm sơ cấp: $y = |x| = \begin{cases} x & \text{nếu } x \geq 0 \\ -x & \text{nếu } x < 0 \end{cases}$

Chương 1. Hàm số và giới hạn



2. Các định nghĩa về giới hạn hàm số

Định nghĩa 2.1.

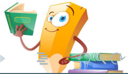
Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trong lân cận của điểm x_0 (có thể không xác định tại x_0). Ta nói hàm số có giới hạn là A khi x dần tới x_0, ký hiệu là $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$, nếu

$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0$ sao cho $|f(x) - A| < \epsilon$ với $\forall x : 0 < |x - x_0| < \delta$.

Ví dụ 2.1.

Chứng minh rằng $\lim\limits_{x \to 1} (2x - 1) = 1$.

Lấy $\epsilon > 0$ bé tùy ý, ta cần tìm số $\delta > 0$ sao cho nếu $0 < |x - 1| < \delta$ thì $|(2x - 1) - 1| < \epsilon$. Phân tích $|(2x - 1) - 1| = 2|x - 1| < \epsilon$ nếu $|x - 1| < \dfrac{\epsilon}{2}$. Vậy ta có thể chọn $\delta = \dfrac{\epsilon}{2}$. Khi đó nếu $0 < |x - 1| < \delta$ thì $|(2x - 1) - 1| < \epsilon$.



Định nghĩa 2.2.

Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trong lân cận của điểm x_0.

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = A \iff \forall \{x_n\}_{n=1}^{\infty} \xrightarrow{n \to +\infty} x_0 \text{ thì } \{f(x_n)\}_{n=1}^{\infty} \xrightarrow{n \to +\infty} A.$$

Nếu $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \xrightarrow{n \to +\infty} x_0$ và $\{y_n\}_{n=1}^{\infty} \xrightarrow{n \to +\infty} x_0$,
nhưng $\{f(x_n)\}_{n=1}^{\infty} \xrightarrow{n \to +\infty} A$ còn $\{f(y_n)\}_{n=1}^{\infty} \xrightarrow{n \to +\infty} B$ $(B \neq A)$
thì kết luận rằng $\nexists \lim\limits_{x \to x_0} f(x)$.

Vì vậy, định nghĩa theo ngôn ngữ dãy thường được dùng để chứng tỏ một giới hạn nào đó không tồn tại.

Ví dụ 2.2.

Chứng minh rằng $\nexists \lim\limits_{x\to 0} \sin\dfrac{1}{x}$.

Ta lấy hai dãy $x_n = \dfrac{1}{2n\pi}$ và $y_n = \dfrac{1}{2n\pi + \dfrac{\pi}{2}}$

thỏa mãn $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} y_n = 0$,

nhưng $\lim\limits_{n\to\infty} \sin\dfrac{1}{x_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \sin(2n\pi) = 0$,

còn $\lim\limits_{n\to\infty} \sin\dfrac{1}{y_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \sin(2n\pi + \dfrac{\pi}{2}) = 1$.

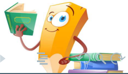
Vậy $\nexists \lim\limits_{x\to 0} \sin\dfrac{1}{x}$.

Định nghĩa 2.3.

- Giới hạn trái của hàm số $f(x)$ khi $x \to x_0$,
  $$\lim_{x\to x_0^-} f(x) = \lim_{x\to x_0-0} f(x) = f(x_0^-) = f(x_0 - 0) = A$$
  $\iff \forall \epsilon > 0,\ \exists \delta > 0$ sao cho $\forall x : x_0 - \delta < x < x_0$ thì $|f(x) - A| < \epsilon$.
- Giới hạn phải của hàm số $f(x)$ khi $x \to x_0$,
  $$\lim_{x\to x_0^+} f(x) = \lim_{x\to x_0+0} f(x) = f(x_0^+) = f(x_0 + 0) = A$$
  $\iff \forall \epsilon > 0,\ \exists \delta > 0$ sao cho $\forall x : x_0 < x < x_0 + \delta$ thì $|f(x) - A| < \epsilon$.

Từ Định nghĩa 1.1 và Định nghĩa 1.3, ta thấy

$$\exists \lim_{x\to x_0} f(x) = A \iff \begin{cases} \exists f(x_0 - 0) & = A \\ \exists f(x_0 + 0) & = A \end{cases}$$



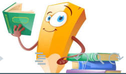
Các định nghĩa về giới hạn hàm số có yếu tố vô cùng

Định nghĩa 2.4.

- $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \infty \iff \forall M > 0, \exists\delta > 0$ sao cho $|f(x)| > M$ nếu $0 < |x - x_0| < \delta$.
- $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = A \iff \forall\epsilon > 0, \exists N > 0$ sao cho $|f(x) - A| < \epsilon$ nếu $|x| > N$.
- $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty \iff \forall M > 0, \exists N > 0$ sao cho $|f(x)| > M$ nếu $|x| > N$.

Ví dụ 1.3

- $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{x} = \infty \iff \forall M > 0, \exists\delta = \frac{1}{M} > 0$ thỏa mãn $|\frac{1}{x}| > M$ với $0 < |x - 0| < \delta$.
- $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0 \iff \forall\epsilon > 0, \exists N = \frac{1}{\epsilon} > 0$ thỏa mãn $|\frac{1}{x} - 0| < \epsilon$ với $|x| > N$.



Chương 1. Hàm số và giới hạn

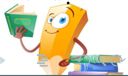
3. Các tính chất của giới hạn hàm số

Định lý 3.1.

Giả sử $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$, $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = B$, ($A, B$ hữu hạn). Khi đó:

- $\lim\limits_{x\to x_0} [f(x) + g(x)] = A + B$;
- $\lim\limits_{x\to x_0} [f(x) - g(x)] = A - B$;
- $\lim\limits_{x\to x_0} [f(x).g(x)] = A.B$;
- $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{A}{B}$, nếu $B \neq 0$;
- $\lim\limits_{x\to x_0} [f(x)]^{g(x)} = A^B$, nếu $0 < A \neq 1$.

Chú ý nếu các điều kiện của Định lý không thỏa mãn, ta có các giới hạn dạng vô định $\infty + \infty$; $\infty - \infty$; $0.\infty$; $\dfrac{\infty}{\infty}$; $\dfrac{0}{0}$; 1^∞; 0^∞; 0^0; ∞^0.



Các tính chất của giới hạn hàm số

Định lý 3.2.

Nếu $f(x)$ là hàm sơ cấp và xác định tại x_0 thì $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$

Ta gọi các nhóm hàm sau là hàm sơ cấp cơ bản:

1. Hàm lũy thừa $y = x^\alpha (\alpha \in \mathbb{R})$,
2. Hàm mũ $y = a^x, (0 < a \neq 1)$,
3. Hàm logarit $y = \log_a x, (0 < a \neq 1)$,
4. Hàm lượng giác $y = \sin x,\ y = \cos x,\ y = \tan x,\ y = \cot x$
5. Hàm lượng giác ngược $y = \arcsin x,\ y = \arccos x,\ y = \arctan x,\ y = arccotx$.

Ta gọi $f(x)$ là hàm sơ cấp nếu nó được tạo thành từ các hàm sơ cấp cơ bản cùng với các phép lấy tổng, hiệu, tích, thương, hợp.

Các tính chất của giới hạn hàm số

Định lý 3.3.

Giả sử $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ với mọi x nằm trong lân cận của x_0 và $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0} h(x) = A$. Khi đó tồn tại $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$ và $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = A$

Từ tiêu chuẩn kẹp, ta chứng minh được một số giới hạn cơ bản sau:

1. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$
2. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos x}{x^2} = \dfrac{1}{2}$
3. $\lim\limits_{x\to \infty} \left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x = \lim\limits_{x\to 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e$
4. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+x)}{x} = 1$
5. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x-1}{x} = 1$

Ví dụ

Tìm giới hạn $L = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x - \cos x}{\sqrt{1+2x} - 1}$.

$$
\begin{aligned}
L &= \lim_{x\to 0} \frac{e^x - \cos x}{\sqrt{2x+1} - 1} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{\sqrt{2x+1} - 1} + \lim_{x\to 0} \frac{1 - \cos x}{\sqrt{2x+1} - 1} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} . \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{2x+1} + 1}{2} + \lim_{x\to 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} . \lim_{x\to 0} \frac{x(\sqrt{2x+1} + 1)}{2} \\
&= 1.\frac{2}{2} + \frac{1}{2}.0 = 1.
\end{aligned}
$$

Ví dụ

Tính giới hạn: $I = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos x}{\sqrt[4]{1+4x^2}-1}$.

$$
\begin{aligned}
I = & \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2}.\frac{x^2}{\sqrt[4]{1+4x^2}-1} = \frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{\sqrt[4]{1+4x^2}-1} \\
= & \frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{x^2(\sqrt[4]{1+4x^2}+1)}{(\sqrt[4]{1+4x^2}-1)(\sqrt[4]{1+4x^2}+1)} \\
= & \frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{x^2(\sqrt[4]{1+4x^2}+1)}{\sqrt{1+4x^2}-1} \\
= & \frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{x^2(\sqrt[4]{1+4x^2}+1)(\sqrt{1+4x^2}+1)}{1+4x^2-1} \\
= & \lim_{x\to 0}\frac{(\sqrt[4]{1+4x^2}+1)(\sqrt{1+4x^2}+1)}{8} = \frac{1}{2}.
\end{aligned}
$$

4. Vô cùng bé, vô cùng lớn

Định nghĩa 4.1.

Hàm số $f(x)$ được gọi là vô cùng bé (VCB) khi x dần tới x_0 nếu $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = 0$.

Ví dụ 1.4

1. $f(x) = \sin x, \; g(x) = 1 - \cos x$ là các VCB khi $x \to 0$;
2. $f(x) = \dfrac{1}{x}$ là VCB khi $x \to \infty$.
3. $f(x) = \dfrac{1}{x}$ không phải là VCB khi $x \to 1$.

Tính chất của vô cùng bé

1. Nếu $f(x)$ và $g(x)$ là hai VCB trong cùng một quá trình thì tổng, hiệu, tích của chúng cũng là VCB trong quá trình ấy.
2. Nếu $f(x)$ là VCB khi $x \to x_0$ và $g(x)$ là hàm bị chặn trong lân cận của x_0 thì tích $f(x).g(x)$ là VCB khi $x \to x_0$.

Ví dụ. Tìm $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\sin x}{x}$.

Khi $x \to \infty$, $\dfrac{1}{x}$ là VCB, còn $\sin x$ là hàm bị chặn, nên $\dfrac{\sin x}{x}$ là VCB khi $x \to \infty$. Do đó $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\sin x}{x} = 0$.

Tương tự $\lim\limits_{x\to 0} \left(x.\sin\dfrac{1}{x}\right) = 0$.

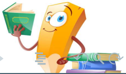
So sánh các vô cùng bé

Cho $f(x)$ và $g(x)$ là hai VCB khi $x \to x_0$, xét giới hạn $I = \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)}$

1. Nếu $I = 0$ thì ta nói $f(x)$ là VCB có bậc cao hơn $g(x)$ khi $x \to x_0$, ký hiệu là $f(x) = o(g(x)),\ x \to x_0$.
2. Nếu $I = \infty$ thì ta nói $f(x)$ là VCB có bậc thấp hơn $g(x)$ khi $x \to x_0$, hoặc $g(x)$ có bậc cao hơn $f(x)$, ký hiệu là $g(x) = o(f(x)),\ x \to x_0$.
3. Nếu $I = k \neq 0$ thì ta nói $f(x)$ và $g(x)$ là hai VCB cùng bậc khi $x \to x_0$, ký hiệu là $f(x) = O(g(x)),\ x \to x_0$.
   Đặc biệt, nếu $I = 1$ thì ta nói $f(x)$ và $g(x)$ là hai VCB tương đương khi $x \to x_0$, ký hiệu là $f(x) \sim g(x),\ x \to x_0$.
4. Nếu $\nexists \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ thì ta nói $f(x)$ và $g(x)$ là hai VCB không so sánh được khi $x \to x_0$.

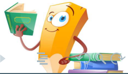
Các vô cùng bé tương đương khi $x \to 0$

- $\sin x \sim x$
- $\arcsin x \sim x$
- $\tan x \sim x$
- $\arctan x \sim x$
- $1 - \cos x \sim \dfrac{x^2}{2}$
- $\ln(1+x) \sim x$
- $\log_a(1+x) \sim \dfrac{x}{\ln a}$, $(0 < a \neq 1)$
- $e^x - 1 \sim x$
- $a^x - 1 \sim x \ln a$, $(0 < a \neq 1)$
- $(1+x)^\alpha - 1 \sim \alpha x$, $\alpha \in \mathbb{R}$



So sánh các vô cùng bé sau:

1. $f(x) = 1 - \cos 2x$ và $g(x) = x$ khi $x \to 0$.
   Xét $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos 2x}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2\sin^2 x}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x} . \lim\limits_{x\to 0} 2\sin x = 1.0 = 0.$
   Vậy $f(x) = o(g(x))$, khi $x \to 0$.
2. $f(x) = \ln(1 + \sin x)$ và $g(x) = 2x$ khi $x \to 0$.
   Xét $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+\sin x)}{2x} = \dfrac{1}{2} . \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+\sin x)}{\sin x} . \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x} = \dfrac{1}{2}.$
   Vậy $f(x) = O(g(x))$, khi $x \to 0$.
3. $f(x) = x . \cos \dfrac{1}{x}$ và $g(x) = x$ khi $x \to 0$.
   Xét $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to 0} \cos \dfrac{1}{x}$. Giới hạn này không tồn tại nên $f(x)$ và $g(x)$ là hai VCB không so sánh được khi $x \to 0$.

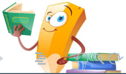


Quy tắc thay thế các VCB tương đương và ngắt bỏ VCB bậc cao

1. Cho $f(x), g(x), \overline{f}(x), \overline{g}(x)$ là các VBC khi $x \to x_0$ và $f(x) \sim \overline{f}(x)$, $g(x) \sim \overline{g}(x)$ khi $x \to x_0$. Khi đó
$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{\overline{f}(x)}{\overline{g}(x)}$$
2. Cho $f(x)$ và $g(x)$ là hai VCB khi $x \to x_0$ và $f(x) = o(g(x))$, khi $x \to x_0$. Khi đó $f(x) + g(x) \sim g(x)$ khi $x \to x_0$.

Chú ý 4.1.

Không được thay tương đương từng số hạng trong tổng (hiệu) hai VCB . Tức là từ
$$\begin{cases} f(x) \sim \overline{f}(x) \\ g(x) \sim \overline{g}(x) \end{cases} \quad \text{không suy ra được } f(x) \pm g(x) \sim \overline{f}(x) \pm \overline{g}(x)$$



Ví dụ

Tìm giới hạn:

$$I = \lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos 5x}{\ln(1 + x \sin x)}.$$

Giới hạn có dạng $\frac{0}{0}$, áp dụng quy tắc thay thế các VCB tương đương:

- Khi $x \to 0$, $1 - \cos 5x \sim \frac{(5x)^2}{2}$.
- Khi $x \to 0$, $\ln(1 + x.\sin x) \sim x.\sin x \sim x^2$.
- $I = \lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos 5x}{\ln(1 + x \sin x)} = \lim_{x \to 0} \frac{25x^2}{2x^2} = \frac{25}{2}$.

Ví dụ: Tìm giới hạn $I = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1 - \sqrt{\cos x}.\sqrt{\cos 2x}}{\sin^2 x}$.

Hướng dẫn:

$$I = \lim_{x \to 0} \frac{1 - \sqrt{\cos x}}{\sin^2 x} + \lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{\cos x}\left(1 - \sqrt{\cos 2x}\right)}{\sin^2 x}$$

$$I = \lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{\sin^2 x\,(1 + \sqrt{\cos x})} + \lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{\cos x}\,(1 - \cos 2x)}{\sin^2 x\left(1 + \sqrt{\cos 2x}\right)}$$

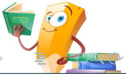
Khi $x \to 0$, $1 - \cos x \sim \dfrac{x^2}{2}$, $1 - \cos 2x \sim \dfrac{(2x)^2}{2} = 2x^2$, $\sin^2 x \sim x^2$.

$$I = \lim_{x \to 0} \frac{x^2}{2x^2\,(1 + \sqrt{\cos x})} + \lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{\cos x}\,(2x^2)}{x^2\left(1 + \sqrt{\cos 2x}\right)} = \lim_{x \to 0} \frac{1}{2\,(1 + \sqrt{\cos x})} + \lim_{x \to 0} \frac{2\sqrt{\cos x}}{1 + \sqrt{\cos 2x}}$$

$$I = \frac{1}{4} + \frac{2}{2} = \frac{5}{4}.$$

1. $f(x)$ được gọi là vô cùng lớn (VCL) khi $x \to x_0$, nếu $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \infty$.
2. Để so sánh hai VCL $f(x)$ và $g(x)$ khi $x \to x_0$, ta cũng xét giới hạn $I = \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)}$
   - Nếu $I = \infty$ thì ta nói $f(x)$ là VCL có bậc cao hơn $g(x)$ khi $x \to x_0$,
   - Nếu $I = 0$ thì ta nói $f(x)$ là VCL có bậc thấp hơn $g(x)$ khi $x \to x_0$, hoặc $g(x)$ có bậc cao hơn $f(x)$
   - Nếu $I = k \neq 0$ thì ta nói $f(x)$ và $g(x)$ là hai VCL cùng bậc khi $x \to x_0$.
     Đặc biệt, nếu $I = 1$ thì ta nói $f(x)$ và $g(x)$ là hai VCL tương đương khi $x \to x_0$, ký hiệu là $f(x) \sim g(x),\ x \to x_0$.
   - Nếu $\nexists \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ thì ta nói $f(x)$ và $g(x)$ là hai VCL không so sánh được khi $x \to x_0$.
3. Quy tắc thay thế VCL tương đương và ngắt bỏ VCL bậc thấp hơn.

1. $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{\cos x}-\sqrt[3]{\cos x}}{\sin^2 x}$
2. $\displaystyle\lim_{x\to 1}\left(\frac{3}{1-\sqrt{x}}-\frac{2}{1-\sqrt[3]{x}}\right)$
3. $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\left(\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x+1}\right)$
4. $\displaystyle\lim_{x\to +\infty}\frac{\sqrt{x+\sqrt{x}}}{\sqrt{x+1}}$
5. $\displaystyle\lim_{x\to \infty}x^2\left(1-\cos\frac{1}{x}\right)$
6. $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+2x^2}-\cos x}{x^2}$
7. $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{5}-\sqrt{4+\cos x}}{x^2}$
8. $\displaystyle\lim_{x\to 2}\frac{2^x-x^2}{x-2}$
9. $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{e^{x^3}-1+x^2}{x\tan x}$



Chú ý 4.2.

Với giới hạn dạng 1^∞ ta có công thức sau:

$$\lim_{x\to x_0} f(x)^{g(x)}(1^\infty) = e^{\lim\limits_{x\to x_0} g(x)[f(x)-1]}$$

Ví dụ 4.1.

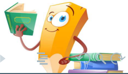
Tìm giới hạn: $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x^2+1}{3x^2+5}\right)^{2x^2+x}$.

Giới hạn có dạng 1^∞, áp dụng công thức :

$$A = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{3x^2+1}{3x^2+5}\right)^{2x^2+x} = e^{\lim\limits_{x\to\infty}(2x^2+x)\left(\frac{3x^2+1}{3x^2+5}-1\right)}$$

$$\ln A = \lim_{x\to\infty}\frac{-4(2x^2+x}{3x^2+5}\left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim_{x\to\infty}\frac{-8x^2}{3x^2}\left(\frac{0}{0}\right) = -\frac{8}{3}.$$

Vậy $A = e^{-8/3}$



Bài tập. Tìm các giới hạn sau (dạng 1^∞)

1. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x+1}{3x+2}\right)^{4x}$
2. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x^2+1}{2x^2-5}\right)^{x^2}$
3. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+2}{x+1}\right)^{3x}$
4. $\lim\limits_{x\to 1}(1+\sin\pi x)^{\cot\pi x}$
5. $\lim\limits_{x\to 0}(1-2x^2)^{\cot^2 x}$
6. $\lim\limits_{x\to 0^+}\sqrt[x]{\cos\sqrt{x}}$

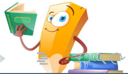
5. Hàm số liên tục

Định nghĩa 5.1.

1. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trong lân cận của x_0. Hàm số được gọi là liên tục tại x_0, nếu $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$
2. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trong lân cận trái của x_0. Hàm số được gọi là liên tục trái tại x_0, nếu $\lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x) = f(x_0)$
3. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trong lân cận phải của x_0. Hàm số được gọi là liên tục phải tại x_0, nếu $\lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x) = f(x_0)$

$$y = f(x) \text{ liên tục tại } x_0 \iff \begin{cases} y = f(x) \text{ liên tục trái tại } x_0 \\ y = f(x) \text{ liên tục phải tại } x_0 \end{cases}$$

$$\iff f(x_0 - 0) = f(x_0 + 0) = f(x_0)$$



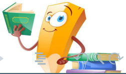
Hàm số liên tục

Định nghĩa 5.2.

1. Hàm số $y = f(x)$ được gọi là liên tục trong khoảng (a, b) nếu nó liên tục tại mọi điểm $x_0 \in (a, b)$.
2. Hàm số $y = f(x)$ được gọi là liên tục trên đoạn $[a, b]$ nếu nó $\begin{cases} \text{liên tục trong } (a, b), \\ \text{liên tục phải tại } a, \\ \text{liên tục trái tại } b. \end{cases}$

Chú ý 5.1.

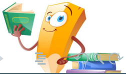
Các hàm sơ cấp thì liên tục trên tập xác định của nó.



Ví dụ

Xét tính liên tục của hàm số $f(x) = \begin{cases} x^2 + a & \text{nếu } x \le 0 \\ \dfrac{\ln(1+3x)}{x} & \text{nếu } x > 0 \end{cases}$

- Với mọi $x \in (-\infty, 0) \implies f(x) = x^2 + a$ là hàm sơ cấp và xác định nên hàm số liên tục trong $(-\infty, 0)$.
- Với mọi $x \in (0, +\infty) \implies f(x) = \dfrac{\ln(1+3x)}{x}$ là hàm sơ cấp và xác định nên hàm số liên tục trong $(0, +\infty)$.
- Tại $x = 0$, ta có $f(0) = a$;
  $f(0-0) = \lim\limits_{x\to 0^-} (x^2 + a) = a$;
  $f(0+0) = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\ln(1+3x)}{x} = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{3x}{x} = 3.$
  Nếu $a = 3$ thì $f(0) = f(0-0) = f(0+0)$, hàm số liên tục tại $x = 0$.
  Nếu $a \neq 3$ thì $f(0) = f(0-0) \neq f(0+0)$, hàm số gián đoạn tại $x = 0$.



Ví dụ

Xét tính liên tục của hàm số $f(x) = \begin{cases} x.\sin\dfrac{1}{x} & \text{nếu } x \neq 0 \\ a & \text{nếu } x = 0 \end{cases}$

- Với mọi $x \in (-\infty, 0) \cup (0, +\infty) \Longrightarrow f(x) = x.\sin\dfrac{1}{x}$ là hàm sơ cấp và xác định nên hàm số liên tục trong $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$.
- Tại $x = 0$, ta có $f(0) = a$; $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = \lim\limits_{x \to 0} \left(x.\sin\dfrac{1}{x}\right) = 0$

  (vì x là VCB khi $x \to 0$, $\sin\dfrac{1}{x}$ là hàm bị chặn nên tích của chúng là VCB khi $x \to 0$)

  Nếu $a = 0$ thì $f(0) = \lim\limits_{x \to 0} f(x)$, hàm số liên tục tại $x = 0$.

  Nếu $a \neq 0$ thì $f(0) \neq \lim\limits_{x \to 0} f(x)$, hàm số gián đoạn tại $x = 0$.

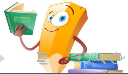
Điểm gián đoạn

Định nghĩa 5.3.

Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trong lân cận của x_0, nếu hàm số không liên tục tại x_0 thì ta nói rằng hàm số gián đoạn tại x_0 và x_0 là điểm gián đoạn của hàm số.

Như vậy x_0 là điểm gián đoạn của hàm số nếu một trong các điều kiên sau xảy ra:

1. Hàm số không xác định tại x_0, $\nexists f(x_0)$;
2. $\nexists f(x_0 - 0)$;
3. $\nexists f(x_0 + 0)$;
4. Hai trong ba giá trị $f(x_0), f(x_0 - 0), f(x_0 + 0)$ khác nhau.



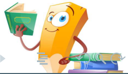
Phân loại điểm gián đoạn của hàm số

Định nghĩa 5.4.

Cho x_0 là một điểm gián đoạn của hàm số $y = f(x)$. Khi đó:

1. x_0 được gọi là điểm gián đoạn loại 1 nếu $\begin{cases} \exists f(x_0 - 0) & \text{hữu hạn} \\ \exists f(x_0 + 0) & \text{hữu hạn} \end{cases}$ Giá trị $h = f(x_0 + 0) - f(x_0 - 0)$ được gọi là bước nhảy của hàm số tại x_0. Đặc biệt nếu $h = 0$ thì x_0 được gọi là điểm gián đoạn bỏ được (khử được) của hàm số.
2. x_0 được gọi là điểm gián đoạn loại 2 nếu nó không phải loại 1.

Ví dụ: Xét hàm số $f(x) = e^{\frac{1}{x}}$. Đây là hàm sơ cấp và xác định tại mọi $x \neq 0$ nên hàm số liên tục tại mọi $x \neq 0$.
Tại $x = 0$, ta có $f(0 - 0) = 0$; $f(0 + 0) = +\infty$ nên $x = 0$ là điểm gián đoạn loại 2 của hàm số.

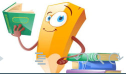


Ví dụ

Tìm và phân loại điểm gián đoạn của $f(x) = \dfrac{|x-1|}{x^2-3x+2}$

Hàm số xác định tại mọi $x \neq 1$ và $x \neq 2$.

1. $\forall x \in (-\infty, 1) \Longrightarrow f(x) = \dfrac{1}{2-x}$ là hàm sơ cấp và xác định nên liên tục và không có điểm gián đoạn trong $(-\infty, 1)$.
2. $\forall x \in (1,2) \cup (2, +\infty) \Longrightarrow f(x) = \dfrac{1}{x-2}$ là hàm sơ cấp và xác định nên liên tục và không có điểm gián đoạn trong $(1,2) \cup (2,+\infty)$.
3. Tại $x = 1$, hàm số không xác định nên $x = 1$ là điểm gián đoạn.
   $f(1-0) = \lim\limits_{x \to 1-0} \dfrac{1}{2-x} = 1$; $f(1+0) = \lim\limits_{x \to 1+0} \dfrac{1}{x-2} = -1$.
   Vậy $x = 1$ là điểm gián đoạn loại 1 của hàm số.

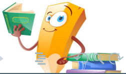


Ví dụ

Tìm và phân loại điểm gián đoạn của $f(x) = \dfrac{|x-1|}{x^2-3x+2}$

Hàm số xác định tại mọi $x \neq 1$ và $x \neq 2$.

1. $\forall x \in (-\infty, 1) \Longrightarrow f(x) = \dfrac{1}{2-x}$ là hàm sơ cấp và xác định nên liên tục và không có điểm gián đoạn trong $(-\infty, 1)$.
2. $\forall x \in (1,2) \cup (2, +\infty) \Longrightarrow f(x) = \dfrac{1}{x-2}$ là hàm sơ cấp và xác định nên liên tục và không có điểm gián đoạn trong $(1,2) \cup (2, +\infty)$.
3. Tại $x = 1$, hàm số không xác định nên $x = 1$ là điểm gián đoạn.
   $f(1-0) = \lim\limits_{x \to 1-0} \dfrac{1}{2-x} = 1$; $f(1+0) = \lim\limits_{x \to 1+0} \dfrac{1}{x-2} = -1$.
   Vậy $x = 1$ là điểm gián đoạn loại 1 của hàm số.
4. Tại $x = 2$ hàm số không xác định nên $x = 2$ là điểm gián đoạn.
   $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = \lim\limits_{x \to 2} \dfrac{1}{x-2} = \infty$.
   Vậy $x = 2$ là điểm gián đoạn loại 2 của hàm số.



Chương 2. ĐẠO HÀM VÀ VI PHÂN

ThS. Nguyễn Thị Huyên

BM Toán Giải tích - Trường ĐHGTVT

Năm 2025

Mục lục

Định nghĩa 1.1.

Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trong lân cận của điểm x_0 (kể cả tại x_0). Cho x_0 số gia $\Delta x \neq 0$ (bé), đặt $\Delta f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ và gọi là số gia của hàm số tại x_0. Nếu tồn tại $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta f(x_0)}{\Delta x}$ và hữu hạn thì giới hạn đó được gọi là đạo hàm của hàm số tại x_0 và ký hiệu là $f'(x_0) = y'(x_0) = \dfrac{df(x_0)}{dx} = \dfrac{dy}{dx}(x_0)$

Định nghĩa đạo hàm:

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Tính đạo hàm bằng định nghĩa

Ví dụ 1.1.

$$f(x) = x(x-1)(x-2)(x-3)\cdots(x-2024)(x-2025).$$

Tính $f'(0)$?

Theo định nghĩa,

$$f'(0) = \lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0}\frac{x(x-1)\cdots(x-2024)(x-2025)-0}{x-0}$$

$$f'(0) = \lim_{x\to 0}(x-1)(x-2)(x-3)\cdots(x-2024)(x-2025)$$

$$f'(0) = (-1)(-2)(-3)\cdots(-2024)(-2025) = -(2025)!$$

Bảng đạo hàm của các hàm cơ bản

$(x^\alpha)' = \alpha . x^{\alpha-1}$

$(C)' = 0$ với C là hằng số

$(e^x)' = e^x$

$(a^x)' = a^x . \ln a$ với $0 < a \neq 1$

$$(\ln x)' = \frac{1}{x}$$

$$(log_a x)' = \frac{1}{x \ln a} \quad \text{với } 0 < a \neq 1$$

$$(\sin x)' = \cos x$$

$$(\cos x)' = -\sin x$$

$$(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$(\cot x)' = \frac{-1}{\sin^2 x}$$

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$(\arccos x)' = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}$$

$$(arccotx)' = \frac{-1}{1+x^2}$$

Định nghĩa 1.2.

1. Đạo hàm trái tại x_0

$$f'_-(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0-0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{x \to x_0 - 0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

2. Đạo hàm phải tại x_0

$$f'_+(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0+0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{x \to x_0 + 0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Vậy $\quad \exists f'(x_0) \iff \begin{cases} \exists f'_-(x_0) \\ \exists f'_+(x_0) \\ f'_-(x_0) = f'_+(x_0) \end{cases}$

Định lý 1.1.

Giả sử $f(x)$ và $g(x)$ có đạo hàm tại x. Khi đó tổng, hiệu, tích, thương của chúng cũng có đạo hàm tại x và:

- $(f(x)+g(x))' = f'(x)+g'(x)$;
- $(f(x)-g(x))' = f'(x)-g'(x)$;
- $(k.f(x))' = k.f'(x)$ với k là hằng số;
- $(f(x).g(x))' = f'(x).g(x)+f(x).g'(x)$;
- $\left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right)' = \dfrac{f'(x).g(x)-f(x).g'(x)}{g^2(x)}$ nếu $g(x)\neq 0$.

Các quy tắc tính đạo hàm

Định lý 1.2.

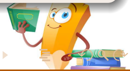
Cho hàm số $u = u(x)$ có đạo hàm tại x và hàm số $f = f(u)$ có đạo hàm tại $u(x)$. Khi đó hàm hợp $f = f[u(x)]$ có đạo hàm tại x và

$$f'(x) = f'[u(x)].u'(x).$$

Định lý 1.3.

Cho hàm số $y = y(x)$ có đạo hàm tại x và có hàm số ngược $x = x(y)$. Nếu $y'(x) \neq 0$, thì hàm số ngược $x = x(y)$ cũng có đạo hàm tại y và

$$x'(y) = \frac{1}{y'(x)}.$$



Ví dụ 1.2.

Cho $f(x) = |x^3|$, hãy tính $f'(x) =?$

Ta có $f(x) = \begin{cases} -x^3 & \text{nếu } x < 0, \\ x^3 & \text{nếu } x \geq 0 \end{cases}$

- Với $x < 0$, ta có $f(x) = -x^3$ nên $f'(x) = -3x^2$.
- Với $x > 0$, ta có $f(x) = x^3$ nên $f'(x) = 3x^2$.
- Tại $x = 0$, ta có: $f'_-(0) = \lim\limits_{x \to 0-0} \dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim\limits_{x \to 0-0} \dfrac{-x^3 - 0}{x - 0} = 0$

  $f'_+(0) = \lim\limits_{x \to 0+0} \dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim\limits_{x \to 0+0} \dfrac{x^3 - 0}{x - 0} = 0$

  Vì $f'_-(0) = f'_+(0) = 0$ nên $f'(0) = 0$.

Vậy $f'(x) = \begin{cases} -3x^2 & \text{nếu } x < 0, \\ 3x^2 & \text{nếu } x \geq 0. \end{cases}$

Ví dụ 1.3.

Tính đạo hàm của hàm số $f(x) = \begin{cases} 2x^2 + 3x & \text{nếu } x \leq 0, \\ \ln(1+x) - x & \text{nếu } x > 0. \end{cases}$

1. Với $x < 0 \Longrightarrow f'(x) = 4x + 3$.
2. Với $x > 0 \Longrightarrow f'(x) = \dfrac{1}{1+x} - 1 = \dfrac{-x}{1+x}$.
3. Tại $x = 0$,
   1. $f'_-(0) = \lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{2x^2 + 3x}{x} = \lim\limits_{x \to 0^-} (2x + 3) = 3,$
   2. $f'_+(0) = \lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{\ln(1+x) - x}{x} = \lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{\ln(1+x)}{x} - 1 = 1 - 1 = 0.$
   3. Vì $f'_-(0) \neq f'_+(0)$ nên hàm số không có đạo hàm tại $x = 0$.

Ví dụ 1.4.

Tính đạo hàm của hàm số $f(x) = \begin{cases} 2^x - 1 & \text{nếu } x \leq 0, \\ \ln(1+x) & \text{nếu } x > 0. \end{cases}$

1. Với $x < 0 \Longrightarrow f'(x) = 2^x \ln 2$.
2. Với $x > 0 \Longrightarrow f'(x) = \dfrac{1}{1+x}$.
3. Tại $x = 0$,

$$f'_-(0) = \lim_{x \to 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0^-} \frac{2^x - 1}{x} = \ln 2,$$

$$f'_+(0) = \lim_{x \to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0^+} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1.$$

Vì $f'_-(0) \neq f'_+(0)$ nên hàm số không có đạo hàm tại $x = 0$.

Định nghĩa 1.3.

Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trong $U(x_0)$ (kể cả tại x_0), số gia $\Delta x \neq 0$ (bé), đặt $\Delta f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$. Nếu $\exists A \in \mathbb{R}$ sao cho $\Delta f(x_0) = A.\Delta x + o(\Delta x)$, khi $\Delta x \to 0$ thì hàm số được gọi là khả vi tại x_0 và $df(x_0) = A.\Delta x$ được gọi là vi phân của hàm số tại x_0.

Định lý 1.4.

Hàm số $y = f(x)$ khả vi tại $x_0 \iff \exists f'(x_0) = A$.

Vi phân:

$$df(x_0) = f'(x_0).\Delta x,$$
$$df = dy = df(x) = f'(x).dx.$$

Ví dụ 1.5.

Cho hàm số

$$f(x) = \begin{cases} \arctan x - x & \text{nếu } x < 0, \\ x^2 + 2x & \text{nếu } x \geq 0. \end{cases}$$

Xét tính khả vi của hàm số.

- Với $x < 0$, ta có $f(x) = \arctan x - x$ nên $f'(x) = \dfrac{1}{1+x^2} - 1$. Hàm số khả vi trong $(-\infty, 0)$.
- Với $x > 0$, ta có $f(x) = x^2 + 2x$ nên $f'(x) = 2x + 2$. Hàm số khả vi trong $(0, +\infty)$.
- Tại $x = 0$, ta có: $f'_+(0) = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim\limits_{x\to 0^+} (x+2) = 2$,

  $f'_-(0) = \lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{\arctan x - x}{x} = 0$.

  Như vậy $f'_+(0) \neq f'_-(0)$ nên $f'(0)$ không tồn tại và hàm số không khả vi tại $x = 0$.

Định nghĩa 2.1.

Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $y' = f'(x)$ với $\forall x \in (a, b)$. Khi đó nếu hàm số $y' = f'(x)$ lại có đạo hàm tại x thì $\big(f'(x)\big)'$ được ký hiệu là $f''(x)$ và được gọi là đạo hàm cấp 2 của hàm số $y = f(x)$. Tương tự, đạo hàm cấp 3 của hàm số: $f^{(3)}(x) = \big(f''(x)\big)'$;

...

Đạo hàm cấp n của hàm số: $f^{(n)}(x) = \big(f^{(n-1)}(x)\big)'$.

Đạo hàm cấp n

$$f^{(n)}(x) = \big(f^{(n-1)}(x)\big)', \ \forall n = 1, 2, 3, \cdots$$

Ví dụ 2.1.

Tính đạo hàm cấp 2 của hàm số $f(x) = \ln(x + \sqrt{1 + x^2})$.

1. $$f'(x) = \frac{1 + \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}}{x + \sqrt{1+x^2}} = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}.$$
2. $$f''(x) = \frac{-x}{\sqrt{(1+x^2)^3}}.$$

Đạo hàm cấp cao của một số hàm quen thuộc

Với a, b, α là các số thực cho trước, $n = 1, 2, 3, \cdots$, ta có:

1. $(e^{ax})^{(n)} = a^n e^{ax}$
2. $\left((ax+b)^\alpha\right)^{(n)} = \alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)(ax+b)^{\alpha-n}.a^n$
3. $\left(\dfrac{1}{ax+b}\right)^{(n)} = (-1)^n \dfrac{n!a^n}{(ax+b)^{n+1}}$
4. $\left(\ln(ax+b)\right)^{(n)} = (-1)^{n-1} \dfrac{(n-1)!a^n}{(ax+b)^n}$
5. $\left(\sin(ax+b)\right)^{(n)} = a^n.\sin\left(ax+b+\dfrac{n\pi}{2}\right)$
6. $\left(\cos(ax+b)\right)^{(n)} = a^n.\cos\left(ax+b+\dfrac{n\pi}{2}\right)$

Định nghĩa 2.2.

Cho hàm số $y = f(x)$ khả vi trong (a, b). Hàm số được gọi là khả vi n lần trong (a, b) nếu nó khả vi $(n-1)$ lần trong (a, b) và đạo hàm cấp $(n-1)$ của $f(x)$ cũng khả vi. Khi đó vi phân cấp n của $f(x)$:

$$d^n f(x) = d\Big(d^{n-1} f(x)\Big).$$

Vi phân cấp n

$$d^n f(x) = f^{(n)}(x).dx^n, \ \forall n = 1, 2, 3, \cdots$$

Cho $f(x)$ và $g(x)$ là các hàm khả vi n lần; C là các hằng số cho trước. Khi đó:

1. $\left[f(x)+g(x)\right]^{(n)}=f^{(n)}(x)+g^{(n)}(x)$,
2. $\left[f(x)-g(x)\right]^{(n)}=f^{(n)}(x)-g^{(n)}(x)$,
3. $\left[C.f(x)\right]^{(n)}=C.f^{(n)}(x)$,
4. $\left[f(x).g(x)\right]^{(n)}=\sum\limits_{k=0}^{n}C_n^k.f^{(k)}(x).g^{(n-k)}(x)$ (Công thức Leibnitz).

Ví dụ 2.2.

Tính đạo hàm và vi phân cấp n của hàm số: $f(x) = \dfrac{5x+8}{6x^2+x-2}$

Tách $f(x) = \dfrac{5x+8}{(2x-1)(3x+2)} = \dfrac{3}{2x-1} - \dfrac{2}{3x+2}$.

$$\Longrightarrow f^{(n)}(x) = \left(\frac{3}{2x-1}\right)^{(n)} - \left(\frac{2}{3x+2}\right)^{(n)}$$

$$= (-1)^n.n!\left[\frac{3.2^n}{(2x-1)^{n+1}} - \frac{2.3^n}{(3x+2)^{n+1}}\right].$$

Vi phân cấp n

$$d^n f(x) = (-1)^n.n!\left[\frac{3.2^n}{(2x-1)^{n+1}} - \frac{2.3^n}{(3x+2)^{n+1}}\right].dx^n.$$

Ví dụ 2.3.

Tính đạo hàm cấp n của hàm số: $y = \dfrac{7x+4}{(2x+1)(3x+2)}$.

1. Tách $y(x) = \dfrac{7x+4}{(2x+1)(3x+2)} = \dfrac{1}{2x+1} + \dfrac{2}{3x+2}$
2. Áp dụng công thức: $\left(\dfrac{1}{ax+b}\right)^{(n)} = (-1)^n n! \dfrac{a^n}{(ax+b)^{n+1}}$
3. Ta có:

$$
\begin{aligned}
y^{(n)}(x) &= \left(\frac{1}{2x+1}\right)^{(n)} + 2\left(\frac{1}{3x+2}\right)^{(n)} \\
&= (-1)^n n! \left[\frac{2^n}{(2x+1)^{n+1}} + \frac{2.3^n}{(3x+2)^{n+1}}\right]
\end{aligned}
$$

Ví dụ 2.4.

Tính đạo hàm cấp n của hàm số: $y = \dfrac{2x^2+3x+5}{2x+1}$.

1. $y(x) = x + 1 + \dfrac{4}{2x+1}$
2. $y'(x) = 1 - \dfrac{4}{(2x+1)^2}.2$
3. $y''(x) = 4\dfrac{(-1)(-2)}{(2x+1)^3}.2^2$
4. $y^{(3)}(x) = 4\dfrac{(-1)(-2)(-3)}{(2x+1)^4}.2^3$
5. $\vdots$
6. $y^{(n)}(x) = 4\dfrac{(-1)(-2)(-3)\cdots(-n)}{(2x+1)^{(n+1)}}.2^n = 4\dfrac{(-1)^n n! 2^n}{(2x+1)^{(n+1)}}$

Ví dụ 2.5.

Tính đạo hàm cấp n và tính $f^{(100)}(0)$ của hàm số:

$$f(x) = (x+2)\cos(2x)$$

Đặt $g(x) = x + 2 \Longrightarrow g'(x) = 1, g^{(k)}(x) = 0, \forall k = 2, 3, 4, \cdots$

và $h(x) = \cos(2x) \Longrightarrow h^{(k)}(x) = 2^k \cos\left(2x + \dfrac{k\pi}{2}\right), \forall k = 0, 1, 2, 3, \cdots$

Áp dụng công thức Leibnitz, ta có

$$\begin{aligned}
f^{(n)}(x) &= \sum_{k=0}^{n} C_n^k g^{(k)}(x).h^{(n-k)}(x) \\
&= g(x).h^{(n)}(x) + C_n^1.g'(x).h^{(n-1)}(x) + \cdots + g^{(n)}(x).h(x) \\
&= (x+2).2^n \cos\left(2x + \frac{n\pi}{2}\right) + n.1.2^{n-1} \cos\left(2x + \frac{(n-1)\pi}{2}\right)
\end{aligned}$$

$$\Longrightarrow f^{(100)}(0) = 2.2^{100}.\cos\frac{100\pi}{2} + 100.2^{99}\cos\frac{99\pi}{2} = 2^{101}.$$

Đạo hàm của hàm cho theo tham số

Cho hàm số $y = y(x)$ xác định bởi hệ $\begin{cases} x = & x(t) \\ y = & y(t) \end{cases}$ (t là tham số).

Khi đó, $y'(x) = \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y'(t).dt}{x'(t).dt} = \dfrac{y'(t)}{x'(t)}$,

$$y''(x) = y''_{xx} = \frac{d\big(y'(x)\big)}{dx} = \frac{\big(y'(x)\big)'_t}{x'(t)}.$$

Tương tự, $y^{(3)}(x) = \dfrac{d\big(y''(x)\big)}{dx} = \dfrac{\big(y''(x)\big)'_t}{x'(t)} \cdots$

Ghi nhớ:

$$y'(x) = \frac{y'(t)}{x'(t)}, \quad y''(x) = y''_{xx} = \frac{\big(y'(x)\big)'_t}{x'(t)}.$$

Ví dụ 2.6.

Tính $y'(x), y''(x)$ của hàm cho theo tham số:

1. $\begin{cases} x &= \cos^3 t \\ y &= \sin^3 t \end{cases}$
2. $\begin{cases} x &= t + \ln t \\ y &= t^3 - 3t \end{cases}$

1. Ta có $\begin{cases} x'(t) &= -3\cos^2 t.\sin t \\ y'(t) &= 3\sin^2 t.\cos t \end{cases} \Longrightarrow y'(x) = \dfrac{y'(t)}{x'(t)} = -\tan t$

$$\Longrightarrow y''(x) = \frac{\big(y'(x)\big)'_t}{x'(t)} = \frac{\big(-\tan t\big)'_t}{-3\cos^2 t.\sin t} = \frac{1}{3\cos^4 t.\sin t}.$$

2. Ta có $\begin{cases} x'(t) &= 1 + \dfrac{1}{t} = \dfrac{t+1}{t} \\ y'(t) &= 3t^2 - 3 \end{cases} \Longrightarrow y'(x) = \dfrac{y'(t)}{x'(t)} = 3t^2 - 3t$

$$\Longrightarrow y''(x) = \frac{\big(y'(x)\big)'_t}{x'(t)} = \frac{\big(3t^2 - 3t\big)'_t}{\frac{t+1}{t}} = \frac{6t^2 - 3t}{t+1}.$$

Ví dụ 2.7.

Tính $y'(x), y''(x)$ của hàm cho theo tham số:

$$\begin{cases} x &= a(t - \sin t) \\ y &= a(1 - \cos t) \end{cases}, (a > 0)$$

$$y'_x = \frac{y'(t)}{x'(t)} = \frac{a \sin t}{a(1 - \cos t)} = \frac{2 \sin \frac{t}{2} . \cos \frac{t}{2}}{2 \sin^2 \frac{t}{2}} = \cot \frac{t}{2}$$

$$y''_{xx} = \left(\cot \frac{t}{2}\right)'_x = \left(\cot \frac{t}{2}\right)'_t . t'_x$$

$$= -\frac{1}{2 \sin^2 \frac{t}{2}} . \frac{1}{x'(t)} = -\frac{1}{4a \sin^4 \frac{t}{2}}$$

Chương 2. Đạo hàm và vi phân

3. Các định lý về hàm khả vi

Định lý 3.1.

Cho hàm số $y = f(x)$ đạt cực trị tại $x = c$. Nếu hàm số khả vi tại $x = c$ thì $f'(c) = 0$.

Định lý 3.2.

Cho hàm số $y = f(x)$ thỏa mãn:

1. liên tục trên $[a, b]$,
2. khả vi trong (a, b),
3. $f(a) = f(b)$.

Khi đó $\exists c \in (a, b)$ sao cho $f'(c) = 0$.

Định lý 3.3.

Cho hàm số $y = f(x)$ thỏa mãn:

1. liên tục trên $[a, b]$,
2. khả vi trong (a, b).

Khi đó $\exists c \in (a, b)$ sao cho $f'(c) = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$.

Định lý 3.4.

Cho 2 hàm số $f(x)$ và $g(x)$ thỏa mãn:

1. f, g liên tục trên $[a, b]$,
2. f, g khả vi trong (a, b), $g'(x) \neq 0, \forall x \in (a, b)$.

Khi đó $\exists c \in (a, b)$ sao cho $\dfrac{f'(c)}{g'(c)} = \dfrac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}$.

Quy tắc L'Hospital

Định lý 3.5.

Cho $f(x)$ và $g(x)$ khả vi trong lân cận của (x_0) và

- hoặc $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0} g(x) = 0$,
- hoặc $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0} g(x) = \infty$.

Nếu $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = A$ thì tồn tại $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = A$.

Ghi nhớ:

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} \left(\frac{0}{0}; \frac{\infty}{\infty}\right) \stackrel{L}{=} \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Ví dụ 3.1.

Tìm giới hạn: $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x - 1 - x}{x^2}$.

Giới hạn có dạng $\dfrac{0}{0}$ nên áp dụng quy tắc L'Hospital ta được :

$$I = \lim_{x\to 0} \frac{e^x - x - 1}{x^2} \stackrel{L}{=} \lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{2x}$$

Giới hạn tiếp tục có dạng $\dfrac{0}{0}$ nên áp dụng quy tắc L'Hospital lần nữa ta được :

$$I \stackrel{L}{=} \lim_{x\to 0} \frac{e^x}{2} = \frac{1}{2}$$

Ví dụ 3.2.

Tìm giới hạn

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+2x}-e^x}{x^2}.$$

Giới hạn có dạng $\dfrac{0}{0}$ nên áp dụng quy tắc L'Hospital ta được

$$I = \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{2x+1}-e^x}{x^2} \overset{L}{=} \lim_{x\to 0} \frac{(2x+1)^{-\frac{1}{2}}-e^x}{2x}.$$

Giới hạn tiếp tục có dạng $\dfrac{0}{0}$ nên áp dụng quy tắc L'Hospital lần nữa ta được

$$I \overset{L}{=} \lim_{x\to 0} \frac{-(2x+1)^{-\frac{3}{2}}-e^x}{2} = -1.$$

Ví dụ 3.3.

Tính giới hạn:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(1+e^x)}{e^x}$$

Giới hạn có dạng $\dfrac{\infty}{\infty}$

- Dùng quy tắc L'Hospital: $I = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{(1+e^x)e^x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{1+e^x}$
- $I = 0$.

Ví dụ 3.4.

Tìm giới hạn

$$\lim_{x\to 0} \frac{x - \arctan x}{x^2 \sin x}.$$

Giới hạn có dạng $\dfrac{0}{0}$, áp dụng quy tắc L'Hospital

$$L = \lim_{x\to 0} \frac{x - \arctan x}{x^2 \sin x} = \lim_{x\to 0} \frac{1 - \frac{1}{1+x^2}}{2x\sin x + x^2 \cos x}.$$

$$L = \lim_{x\to 0} \frac{1}{(1+x^2)\left(2\dfrac{\sin x}{x} + \cos x\right)} = \frac{1}{3}.$$

Ví dụ 3.5.

Tìm giới hạn:

$$\lim_{x\to 1} \frac{e^x - xe}{\cos(1-x) - 1}.$$

Giới hạn có dạng $\dfrac{0}{0}$ nên áp dụng quy tắc L'Hospital ta được :

$$I = \lim_{x\to 1} \frac{e^x - xe}{\cos(1-x) - 1} \overset{L}{=} \lim_{x\to 1} \frac{e^x - e}{\sin(1-x)}$$

Giới hạn tiếp tục có dạng $\dfrac{0}{0}$ nên áp dụng quy tắc L'Hospital lần nữa ta được :

$$I \overset{L}{=} \lim_{x\to 1} \frac{e^x}{-\cos(1-x)} = -e$$

Ví dụ 3.6.

Tính giới hạn: $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\arctan x - x}{x^3}$

- Áp dụng quy tắc L' Hospital ta được $I = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\arctan x - x}{x^3} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\frac{1}{1+x^2} - 1}{3x^2}$
- Rút gọn được $I = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{-x^2}{3x^2(1+x^2)} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{-1}{3(1+x^2)} = \dfrac{-1}{3}$

Chú ý 1.

Với các giới hạn dạng $0 \cdot \infty$ ta đưa về $\dfrac{0}{0}$ hoặc $\dfrac{\infty}{\infty}$ và áp dụng quy tắc L'Hospital rồi tính.

Ví dụ 3.7.

$$\lim_{x \to 0^+} x \ln^2 x.$$

Giới hạn có dạng $0 \cdot \infty$, ta chuyển về dạng $\dfrac{\infty}{\infty}$:

$$\begin{aligned}
\lim_{x \to 0^+} x \ln^2 x &= \lim_{x \to +0} \frac{\ln^2 x}{1/x} \left(\frac{\infty}{\infty}\right) \\
&\overset{L}{=} \lim_{x \to 0^+} \frac{2 \ln x (1/x)}{-1/x^2} = \lim_{x \to +0} \frac{2 \ln x}{-1/x} \left(\frac{\infty}{\infty}\right) \\
&\overset{L}{=} \lim_{x \to +0} \frac{2/x}{1/x^2} = 0
\end{aligned}$$

Ví dụ 3.8.

Tìm giới hạn của hàm số:

$$\lim_{x\to\infty} x\left(\frac{\pi}{4} - \arctan\frac{x-1}{x+1}\right)$$

Giới hạn có dạng $0 \cdot \infty$, đưa về dạng $\frac{0}{0}$ và áp dụng quy tắc L'Hospital ta được :

$$I = \lim_{x\to\infty} x\left(\frac{\pi}{4} - \arctan\frac{x-1}{x+1}\right) = \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{\pi}{4} - \arctan\frac{x-1}{x+1}}{1/x}\left(\frac{0}{0}\right)$$

$$\stackrel{L}{=} \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{-2}{(x+1)^2}\cdot\frac{(x+1)^2}{(x+1)^2+(x-1)^2}}{-\frac{1}{x^2}}$$

$$= \lim_{x\to\infty}\frac{2x^2}{2x^2+2} = 1$$

Ví dụ 3.9.

Tính giới hạn: $I = \lim\limits_{x \to 0^+} x^3 \ln x$

- Đưa về dạng $\dfrac{\infty}{\infty}$ rồi sử dụng quy tắc L' Hospital ta được:

  $$I = \lim_{x \to 0^+} \frac{\ln x}{1/x^3} = \lim_{x \to 0^+} \frac{1/x}{-3/x^4}$$

- $I = \lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{-x^3}{3} = 0$

Chú ý 2.

Với giới hạn dạng 1^∞ ta có công thức sau:

$$\lim_{x\to x_0} f(x)^{g(x)}(1^\infty) = e^{\lim\limits_{x\to x_0} g(x)[f(x)-1]}$$

Ví dụ 3.10.

Tìm giới hạn: $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$.

Giới hạn có dạng 1^∞, áp dụng công thức :

$$A = \lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}(1^\infty) = e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x^2}\left(\frac{\sin x}{x}-1\right)}.$$

$$\ln A = \lim_{x\to 0}\frac{\sin x - x}{x^3}\left(\frac{0}{0}\right) \overset{L}{=} \lim_{x\to 0}\frac{\cos x - 1}{3x^2}\left(\frac{0}{0}\right) \overset{L}{=} \lim_{x\to 0}\frac{-\sin x}{6x} = -\frac{1}{6}$$

Vậy $A = e^{-1/6}$

Ví dụ 3.11.

Tính giới hạn: $I = \lim\limits_{x \to 0^+} (1+x)^{\ln x}$

- Đây là giới hạn dạng 1^∞ nên ta có $I = e^{\lim\limits_{x\to 0^+} (1+x-1)\ln x} = e^{\lim\limits_{x\to 0^+} x\ln x}$.
- Xét $J = \lim\limits_{x\to 0^+} x\ln x = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\ln x}{\frac{1}{x}}$
- Áp dụng quy tắc L' Hospital ta có $J = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{1/x}{-1/x^2} = \lim\limits_{x\to 0^+} (-x) = 0$
- Vậy $I = e^0 = 1$.

Chú ý 3.

Với giới hạn dạng 0^0 hoặc ∞^0 ta lấy ln cả 2 vế để đưa giới hạn về dạng tích $0.\infty$ rồi chuyển về $\dfrac{0}{0}$ hoặc $\dfrac{\infty}{\infty}$ để áp dụng quy tắc.

$$A = \lim_{x\to x_0} f(x)^{g(x)} \Rightarrow \ln A = \lim_{x\to x_0} g(x)\cdot \ln[f(x)]$$

Ví dụ 3.12.

Tìm giới hạn: $I = \lim\limits_{x\to 0^+} (\sin x)^{\tan 2x}$

$$\ln I = \lim_{x\to 0^+} \tan 2x \ln(\sin x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln(\sin x)}{\cot 2x} \left(\frac{\infty}{\infty}\right)$$

$$\overset{L}{=} \lim_{x\to 0^+} \frac{\cos x}{\sin x}\cdot\frac{\sin^2(2x)}{-2} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\cos x(4\sin^2 x\cos^2 x)}{-2\sin x}$$

$$= \lim_{x\to 0^+} \left(-2\sin x\cos^3 x\right) = 0$$

Vậy $A = e^0 = 1$.

Bài 1.

Tìm các giới hạn sau (áp dụng quy tắc L'Hospital)

1. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{4\arctan(1+x)-\pi}{x}$
2. $\lim\limits_{x\to +\infty} x(\pi - 2\arctan x)$
3. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x-\sin x}{\sqrt{1+2x}-e^x}$
4. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2}{\sqrt[5]{1+5x}-(1+x)}$
5. $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{x^{2017}}{e^x}$
6. $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{1}{x^2}\right)^{\sin x}$
7. $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{1}{x^2} - \dfrac{1}{\sin^2 x}\right)$

Định lý 3.6.

Cho $f(x)$ khả vi đến cấp $(n+1)$ trong lân cận của x_0. Khi đó ta có

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + 0\big((x-x_0)^n\big).$$

gọi công thức Taylor (khai triển Taylor) của $f(x)$ tại x_0.
Đặc biệt khi $x_0 = 0$, ta có công thức Maclaurent

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + 0\big(x^n\big).$$

Khai triển Maclaurent của một số hàm cơ bản

1. $e^x = 1 + \dfrac{x}{1!} + \dfrac{x^2}{2!} + \cdots + \dfrac{x^n}{n!} + 0\big(x^n\big)$
2. $(1+x)^\alpha = 1 + \dfrac{\alpha}{1!}x + \cdots + \dfrac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + 0\big(x^n\big)$
3. $\dfrac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots + (-1)^n x^n + 0\big(x^n\big)$
4. $\dfrac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n + 0\big(x^n\big)$
5. $\ln(1+x) = x - \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^3}{3!} + \cdots + (-1)^{n-1}\dfrac{x^n}{n} + 0\big(x^n\big)$
6. $\ln(1-x) = -x - \dfrac{x^2}{2!} - \dfrac{x^3}{3!} - \cdots - \dfrac{x^n}{n} + 0\big(x^n\big)$
7. $\cos x = 1 - \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^4}{4!} + \cdots + (-1)^n\dfrac{x^{2n}}{(2n)!} + 0\big(x^{2n}\big)$
8. $\sin x = x - \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^5}{5!} + \cdots + (-1)^n\dfrac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + 0\big(x^{2n+1}\big)$

Ví dụ 3.13.

Khai triển Maclaurin đến cấp n của $f(x) = \dfrac{x+1}{x^2-3x+2}$.

- Ta có $f(x) = \dfrac{x+1}{(x-1)(x-2)} = \dfrac{-2}{x-1} + \dfrac{3}{x-2} = 2\dfrac{1}{1-x} - \dfrac{3}{2}\cdot\dfrac{1}{1-\frac{x}{2}}$
- Áp dụng khai triển Maclaurin của hàm $\dfrac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n + 0(x^n)$, ta có:
- $\dfrac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n + 0(x^n)$.
- $\dfrac{1}{1-\frac{x}{2}} = 1 + \dfrac{x}{2} + \left(\dfrac{x}{2}\right)^2 + \left(\dfrac{x}{2}\right)^3 + \cdots + \left(\dfrac{x}{2}\right)^n + 0(x^n)$.
- Vậy $f(x) = \left(2 + \dfrac{3}{2^2}\right) + \left(2 + \dfrac{3}{2^3}\right)x^2 + \left(2 + \dfrac{3}{2^4}\right)x^3 + \cdots + \left(2 + \dfrac{3}{2^{n+1}}\right)x^n + 0(x^n)$.

Chương 3. TÍCH PHÂN CỦA HÀM MỘT BIẾN

ThS. Nguyễn Thị Huyên

BM Toán Giải tích - Trường ĐHGTVT

Năm 2025

Mục lục

Định nghĩa 1.1.

Hàm $F(x)$ được gọi là một nguyên hàm của $f(x)$ trên tập X nếu $F'(x) = f(x), \forall x \in X$.

Nhận xét 1.

Nếu $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)$ trên X thì $F(x) + C$ (với C là hằng số bất kỳ) cũng là một nguyên hàm của $f(x)$ trên X. Ngược lại, mọi nguyên hàm của $f(x)$ trên X đều có dạng $F(x) + C$. Hay, hai nguyên hàm của cùng một hàm số chỉ sai khác nhau hằng số C.

Định nghĩa 1.2.

Biểu thức $F(x) + C$ được gọi là tích phân của $f(x)$, trong đó $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)$, C là hằng số bất kỳ.

Ký hiệu:

$$\int f(x)dx = F(x) + C$$

x là biến lấy tích phân, $f(x)$ là hàm dưới tích phân.

Các tính chất của tích phân bất định

1. Nếu $\int f(x)dx = F(x) + C$ thì $\int dF(x) = F(x) + C$.
2. Nếu $\int f(x)dx = F(x) + C$ thì $\int f(u)du = F(u) + C$.
3. $\left(\int f(x)dx\right)' = f(x)$ và $d\left(\int f(x)dx\right) = f(x).dx$.
4. $\int (f(x) \pm g(x))\, dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$.
5. $\int kf(x)dx = k\int f(x)dx$ với k là hằng số.

Bảng tích phân của một số hàm quen thuộc

$(1).\ \int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, \alpha \neq -1$ $\quad$ $(2).\ \int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C$

$(3).\ \int e^x dx = e^x + C$ $\quad$ $(4).\ \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C,\ \ 0 < a \neq 1$

$(5).\ \int \sin x dx = -\cos x + C$ $\quad$ $(6).\ \int \cos x dx = \sin x + C$

$(7).\ \int \frac{dx}{\cos^2 x} = \tan x + C$ $\quad$ $(8).\ \int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\cot x + C$

$(9).\ \int \frac{dx}{1+x^2} = \arctan x + C$ $\quad$ $(10).\ \int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a} + C$

$(11).\ \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C$ $\quad$ $(12).\ \int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin\frac{x}{a} + C$

$(13).\ \int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C$

$(14).\ \int \frac{dx}{\sqrt{x^2+A}} = \ln|x + \sqrt{x^2+A}| + C$

1. Phương pháp đổi biến số: Xét $I = \int f(x)dx$

   Đặt $x = \varphi(t) \iff t = \varphi^{-1}(x)$ (tương ứng 1-1).
   Khi đó $dx = \varphi'(t)dt$.
   $I = \int f[\varphi(t)]\,\varphi'(t)dt = \int g(t)dt = G(t) + C = G\left[\varphi^{-1}(x)\right] + C.$

2. Phương pháp tích phân từng phần: $u = u(x),\ v = v(x)$
   $\int udv = uv - \int vdu$

Ví dụ 1.1.

Tính tích phân bất định $\int \frac{2}{e^{2x} - 3e^x + 2} dx$.

1. Đặt $t = e^x$, thì $dx = \frac{dt}{t}$ và tích phân trở thành $I = \int \frac{2}{t(t-1)(t-2)} dt$.
2. Tách $\frac{2}{t(t-1)(t-2)} = \frac{1}{t} - \frac{2}{t-1} + \frac{1}{t-2}$.
3. $I = \ln|t| - 2\ln|t-1| + \ln|t-2| + C = \ln\left|\frac{e^x(e^x-2)}{(e^x-1)^2}\right| + C$.

Ví dụ 1.2.

Tính tích phân : $\displaystyle\int \frac{x \arctan x}{\sqrt{(1+x^2)^3}}\, dx$

Dùng phương pháp tích phân từng phần :

- Đặt $\begin{cases} u &= \arctan x \\ dv &= \dfrac{x.dx}{(1+x^2)^{3/2}} \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} du &= \dfrac{dx}{1+x^2} \\ v &= -\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}} \end{cases}$

  $\Longrightarrow I = -\dfrac{\arctan x}{\sqrt{1+x^2}} + \displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{(1+x^2)^3}} = -\dfrac{\arctan x}{\sqrt{1+x^2}} + J$

- Đặt $x = \tan t \Rightarrow t = \arctan x,\ dt = \dfrac{dx}{1+x^2},\ \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}} = \cos t$

- $J = \displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{(1+x^2)^3}} = \int \cos t dt = \sin t + C = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} + C$

Vậy $I = -\dfrac{\arctan x}{\sqrt{1+x^2}} + \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}} + C$

Ví dụ 1.3.

Tính tích phân: $I = \int \frac{x.\arctan x}{\sqrt{1+x^2}} dx$

- Dùng tích phân từng phần
  $I = \int \arctan x . d\sqrt{1+x^2} = \arctan x . \sqrt{1+x^2} - \int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}$
- $I = \arctan x . \sqrt{1+x^2} - \ln(x + \sqrt{1+x^2}) + C$

Tích phân của các hàm hữu tỷ

Xét $I = \int \frac{P_m(x)}{Q_n(x)} dx$, trong đó $P_m(x), Q_n(x)$ là những đa thức bậc m, n.

1. Nếu $m \geq n$ thì ta thực hiện phép chia và tách được $\frac{P_m(x)}{Q_n(x)} = h(x) + \frac{R_k(x)}{Q_n(x)}$, ở đó $k < n$
2. Nếu $m < n$, ta phân tích mẫu thành tích các nhân tử là đa thức bậc nhất hoặc tam thức bậc 2 có $\Delta < 0$. Sau đó tách hàm dưới tích phân thành tổng của các phân thức đơn giản và đưa về tổng các tích phân
   - $\int \frac{dx}{x-a} = \ln|x-a| + C$
   - $\int \frac{dx}{(x-a)^k} = \frac{(x-a)^{1-k}}{1-k} + C$
   - $\int \frac{(Ax+B)dx}{x^2+px+q} = \frac{A}{2}\int \frac{(2x+p)dx}{x^2+px+q} + M\int \frac{dx}{(x+a)^2+b^2} = \frac{A}{2}\ln(x^2+px+q) + \frac{M}{b}\arctan\frac{x+a}{b} + C$

Ví dụ 1.4.

Tính tích phân bất định: $\displaystyle\int \frac{x^3 + 2x^2 + 8x - 21}{x^2 + 4x + 13} dx.$

1. $I = \displaystyle\int \left(x - 2 + \frac{3x + 5}{x^2 + 4x + 13} \right) dx.$
2. $I = \dfrac{x^2}{2} - 2x + \dfrac{3}{2}. \displaystyle\int \frac{(2x + 4)dx}{x^2 + 4x + 13} - \int \frac{dx}{(x + 2)^2 + 3^2}$
3. $I = \dfrac{x^2}{2} - 2x + \dfrac{3}{2}. \ln(x^2 + 4x + 13) - \dfrac{1}{3} \arctan \dfrac{x + 2}{3} + C.$

Ví dụ 1.5.

Tính tích phân: $I = \int \frac{(2x-1)dx}{9x^2+6x+5}$

- $I = \frac{1}{9}\int \frac{18x+6}{9x^2+6x+5}dx - \frac{5}{3}\int \frac{dx}{9x^2+6x+5}$
- $I = \frac{1}{9}\ln(9x^2+6x+5) - \frac{5}{9}\int \frac{d(3x+1)}{(3x+1)^2+4}$
- $I = \frac{1}{9}\ln(9x^2+6x+5) - \frac{5}{18}\arctan\frac{3x+1}{2} + C$

Tích phân của các hàm lượng giác

Xét tích phân $I = \displaystyle\int R(\sin x, \cos x)dx$, R là hàm hữu tỷ nào đó.

- Nếu R là hàm lẻ đối với $\sin x$ thì đặt $t = \cos x$, khi đó $dt = -\sin x dx$ và $\sin^2 x = 1 - t^2$
- Nếu R là hàm lẻ đối với $\cos x$ thì đặt $t = \sin x$, khi đó $dt = \cos x dx$ và $\cos^2 x = 1 - t^2$
- Nếu R là hàm chẵn với cả $\sin x$ và $\cos x$ thì đặt $t = \tan x$
- Nếu $R(\sin x, \cos x) = \sin^{2n} x.\cos^{2m} x$ thì hạ bậc, chuyển tích về tổng
- Trong trường hợp tổng quát, có thể đặt $t = \tan\dfrac{x}{2}$. Khi đó

$$dx = \frac{2dt}{1+t^2}, \sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}.$$

Ví dụ 1.6.

Tính tích phân: $I = \displaystyle\int \frac{\sin x dx}{\cos x - \cos^2 x}$

- Đặt $t = \cos x$ ta có: $dt = -\sin x dx$ và $\mathrm{I} = \displaystyle\int \frac{\mathrm{dt}}{\mathrm{t}(\mathrm{t}-1)} = \int \left(\frac{1}{\mathrm{t}-1} - \frac{1}{\mathrm{t}}\right) \mathrm{dt}$
- $I = \ln(1-t) - \ln|t| + C$
- $I = \ln(1-\cos x) - \ln|\cos x| + C.$

Ví dụ 1.7.

Tính tích phân: $I = \displaystyle\int \frac{dx}{\sin x . \cos^2 x}$

- Đặt $t = \cos x$ ta có $: dt = -\sin x dx$ và $\mathrm{I} = \displaystyle\int \frac{\mathrm{dt}}{\mathrm{t}^2(\mathrm{t}^2 - 1)}$
- $I = \displaystyle\int \left(\frac{1}{2} \frac{1}{t-1} - \frac{1}{2} \frac{1}{t+1} - \frac{1}{t^2} \right) dt$
- $I = \dfrac{1}{2} \ln |t-1| - \dfrac{1}{2} \ln |t+1| + \dfrac{1}{t} + C$
- $I = \dfrac{1}{2} \ln(1 - \cos x) - \dfrac{1}{2} \ln(1 + \cos x) + \dfrac{1}{\cos x} + C$

Ví dụ 1.8.

Tính tích phân: $I = \int \dfrac{dx}{5 + 2\sin x - \cos x}$

- Đặt $t = \tan\dfrac{x}{2}$ ta có : $\sin x = \dfrac{2t}{1+t^2}, \cos x = \dfrac{1-t^2}{1+t^2}, dx = \dfrac{2dt}{1+t^2}$.
- $\mathrm{I} = \displaystyle\int \dfrac{2\mathrm{dt}}{6\mathrm{t}^2 + 4\mathrm{t} + 4} = \dfrac{1}{3}\int \dfrac{\mathrm{dt}}{\mathrm{t}^2 + \dfrac{2}{3}\mathrm{t} + \dfrac{2}{3}}$
- $I = \dfrac{1}{3}\displaystyle\int \dfrac{dt}{\left(t + \dfrac{1}{3}\right)^2 + \dfrac{5}{9}} = \dfrac{1}{\sqrt{5}}\arctan\dfrac{t + \dfrac{1}{3}}{\dfrac{\sqrt{5}}{3}} + C = \dfrac{1}{\sqrt{5}}\arctan\dfrac{3\tan\dfrac{x}{2} + 1}{\sqrt{5}} + C.$

Ví dụ 1.9.

Tính tích phân: $I = \int \frac{dx}{2 + \cos x}$

- Đổi biến $t = \tan \frac{x}{2} \Rightarrow dx = \frac{2dt}{1+t^2}, \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$
- $I = \int \frac{2dt}{(1+t^2)(2 + \frac{1-t^2}{1+t^2})} = \int \frac{2dt}{3+t^2}$
- $I = \frac{2}{\sqrt{3}}. \arctan \frac{t}{\sqrt{3}} + C$
- $I = \frac{2}{\sqrt{3}}. \arctan \frac{\tan \frac{x}{2}}{\sqrt{3}} + C$,ở đó C là hằng số bất kì.

- $\int R(x, \sqrt{a^2 - x^2})dx$, đặt $x = a\sin t$ hoặc $t = \sqrt{a^2 - x^2}$
- $\int R(x, \sqrt{x^2 - a^2})dx$, đặt $x = \dfrac{a}{\cos t}$ hoặc $t = \sqrt{x^2 - a^2}$
- $\int R(x, \sqrt{x^2 + a^2})dx$, đặt $x = a\tan t$ hoặc $t = \sqrt{x^2 + a^2}$
- $\int \dfrac{dx}{\sqrt{ax^2 + bx + c}}$, ta đưa về một trong hai dạng
  - $\int \dfrac{dx}{\sqrt{x^2 + A}} = \ln |x + \sqrt{x^2 + A}| + C$
  - $\int \dfrac{dx}{\sqrt{A^2 - x^2}} = \arcsin \dfrac{x}{A} + C$
- $I = \int \dfrac{(Ax + B)dx}{\sqrt{ax^2 + bx + c}}$, ta tách ra thành tổng dạng

  $$I = M.\int \frac{(2ax + b)dx}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} + N.\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2 + bx + c}}$$

Ví dụ 1.10.

Tính tích phân bất định : $\int \frac{3x+7}{\sqrt{x^2+2x+5}} dx$.

1. Tách hàm dưới tích phân: $\frac{3x+7}{\sqrt{x^2+2x+5}} = \frac{3}{2}\frac{2x+2}{\sqrt{x^2+2x+5}} + \frac{4}{\sqrt{x^2+2x+5}}$
2. $I = \int \left(\frac{3}{2}\frac{2x+2}{\sqrt{x^2+2x+5}} + \frac{4}{\sqrt{(x+1)^2+4}} \right) dx$
3. $I = 3\int \frac{d(x^2+2x+5)}{2\sqrt{x^2+2x+5}} + 4\int \frac{d(x+1)}{\sqrt{(x+1)^2+4}}$
4. $I = 3\sqrt{x^2+2x+5} + 4\ln\left|x+1+\sqrt{x^2+2x+5}\right| + C.$

Ví dụ 1.11.

Tính tích phân: $I = \displaystyle\int \frac{(5x-3)dx}{\sqrt{2x^2+8x+1}}$

- $I = \dfrac{5}{4}\displaystyle\int \frac{(4x+8)dx}{\sqrt{2x^2+8x+1}} - 13\int \frac{dx}{\sqrt{2x^2+8x+1}}.$
- $\displaystyle\int \frac{(4x+8)dx}{\sqrt{2x^2+8x+1}} = 2\sqrt{2x^2+8x+1} + C_1.$
- $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{2x^2+8x+1}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left|x+2+\sqrt{x^2+4x+\frac{1}{2}}\right| + C_2.$
- $I = \dfrac{5}{2}\sqrt{2x^2+8x+1} - \dfrac{13}{\sqrt{2}}\ln\left|x+2+\sqrt{x^2+4x+\dfrac{1}{2}}\right| + C.$

Ví dụ 1.12.

Tính tích phân: $I = \int \dfrac{dx}{\sqrt{-3x^2+4x-1}}$

- $I = \displaystyle\int \dfrac{dx}{\sqrt{\dfrac{1}{3} - \left(\sqrt{3}x - \dfrac{2}{\sqrt{3}}\right)^2}}$.
- Đổi biến: $t = \sqrt{3}x - \dfrac{2}{\sqrt{3}}$. Khi đó: $I = \dfrac{1}{\sqrt{3}} \displaystyle\int \dfrac{dt}{\sqrt{\dfrac{1}{3} - t^2}}$
- $I = \dfrac{1}{\sqrt{3}} \arcsin(\sqrt{3}t) + C$.
- $I = \dfrac{1}{\sqrt{3}} \arcsin(3x-2) + C$.

Ví dụ 1.13.

Tính tích phân: $I = \displaystyle\int \frac{x\ln(1+\sqrt{1+x^2})}{\sqrt{1+x^2}}dx$

- $I = \displaystyle\int \ln(1+\sqrt{1+x^2})d\left(\sqrt{1+x^2}\right) = \sqrt{1+x^2}\ln(1+\sqrt{1+x^2}) - \int \frac{xdx}{1+\sqrt{1+x^2}}.$
- Tính $J = \displaystyle\int \frac{xdx}{1+\sqrt{1+x^2}}$. Đổi biến

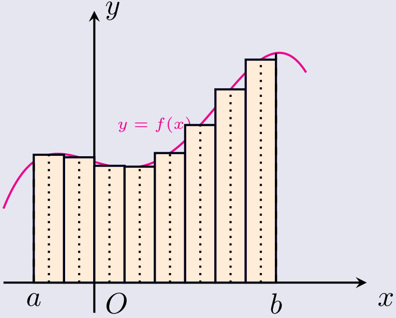
  $t = \sqrt{1+x^2} \Rightarrow t^2 = 1+x^2 \Rightarrow tdt = xdx \Rightarrow J = \displaystyle\int \frac{tdt}{1+t}.$
- $J = \displaystyle\int \left(1 - \frac{1}{1+t}\right)dt = t - \ln|1+t| + C = \sqrt{1+x^2} - \ln(1+\sqrt{1+x^2}) + C.$

  Vậy $I = \sqrt{1+x^2}\ln(1+\sqrt{1+x^2}) - \sqrt{1+x^2} + \ln(1+\sqrt{1+x^2}) + C$ với C là hằng số tùy ý.

Định nghĩa 2.1.

Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $[a,b]$. Chia $[a,b]$ thành n phần nhỏ bởi các mốc $a = x_0, x_1, x_2, \cdots, x_n = b$. Đặt $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$, lấy $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$ bất kỳ với mọi $i = 1, \cdots, n$.

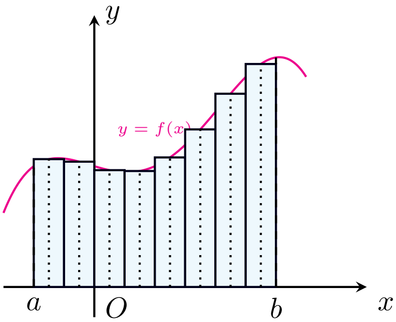
Lập tổng tích phân $I_n = \sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$.



Lập tổng tích phân $I_n = \sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$.

Cho $n \to +\infty$, sao cho $\max_i \Delta x_i \to 0$, nếu tổng tích phân có giới hạn I hữu hạn, không phụ thuộc vào cách chia $[a, b]$ và cách chọn các điểm ξ_i thì giới hạn I được gọi là tích phân xác định của hàm $f(x)$ trên $[a, b]$ và ký hiệu

$$I = \int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to+\infty} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i.$$



$$I_n = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\,\Delta x_i$$

Khi ấy $f(x)$ được gọi là hàm khả tích trên $[a, b]$. Số a và b được gọi là cận dưới và cận trên của tích phân, hàm f là hàm dưới tích phân.

Các tính chất của tích phân xác định

1. Nếu $f(x)$ liên tục trên $[a,b]$ thì nó khả tích trên $[a,b]$.
2. $$\int_b^a f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx.$$
3. $$\int_a^b dx = b - a.$$
4. $$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$
5. $$\int_a^b (\alpha f(x)dx + \beta g(x))\, dx = \alpha \int_a^b f(x)dx + \beta \int_a^b g(x)dx,$$ (α, β là hằng số).

Định lý 2.1.

Cho $f(x)$ liên tục trên đoạn $[a, b]$. Khi ấy tồn tại $c \in [a, b]$ sao cho:

$$\int_a^b f(x)dx = f(c)(b - a).$$

Định lý 2.2.

Cho $f(x)$ liên tục trên $[a, b]$ và $F(x)$ là một nguyên hàm của nó. Khi đó:

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) = F(x)\Big|_a^b.$$

1. Phương pháp đổi biến số: Xét $I = \int\limits_a^b f(x)dx$

   Đặt $x = \varphi(t) \iff t = \varphi^{-1}(x)$, (tương ứng 1-1), $\varphi(\alpha) = a, \varphi(\beta) = b$, $dx = \varphi'(t)dt$ và

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_\alpha^\beta f\left[\varphi(t)\right]\varphi'(t)dt = \int\limits_\alpha^\beta g(t)dt.$$

2. Phương pháp tích phân từng phần: $u = u(x),\ v = v(x)$

   $\int\limits_a^b udv = uv\Big|_a^b - \int\limits_a^b vdu.$

Ví dụ 2.1.

Tính tích phân: $I = \int\limits_0^a \sqrt{a^2 - x^2}dx; \quad a > 0.$

- Đổi biến $x = a\sin t : I = a^2 \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t dt.$
- $I = \dfrac{a^2}{2} \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} (1 + \cos 2t)dt = \dfrac{a^2}{2}\left(t + \dfrac{\sin 2t}{2}\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}.$
- $I = a^2\pi/4.$

Ví dụ 2.2.

Tính tích phân xác định: $I = \int\limits_0^{\sqrt{3}} \dfrac{\arctan x}{(\sqrt{1+x^2})^3} dx.$

1. Đổi biến, đặt $x = \tan t \Leftrightarrow \arctan x = t; x = 0 \Leftrightarrow t = 0, x = \sqrt{3} \Leftrightarrow t = \dfrac{\pi}{3}$
2. Khi đó, $dt = \dfrac{dx}{1+x^2}$, $1 + x^2 = 1 + \tan^2 t = \dfrac{1}{\cos^2 t}$ và
$$I = \int\limits_0^{\sqrt{3}} \frac{\arctan x}{\sqrt{1+x^2}} . \frac{dx}{1+x^2} = \int\limits_0^{\frac{\pi}{3}} t \cos t dt$$
3. Dùng pp tích phân từng phần $I = (t \sin t + \cos t)\Big|_0^{\frac{\pi}{3}} = \dfrac{\sqrt{3}\pi}{6} - \dfrac{1}{2}$

Định nghĩa 3.1.

Cho $f(x)$ xác định trên $[a, +\infty)$ và khả tích trên mọi đoạn $[a, b]$, với $b > a$. Đặt

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{b \to +\infty} \int_a^b f(x)dx$$

và gọi là tích phân suy rộng loại 1 của $f(x)$ trên $[a, +\infty)$. Nếu giới hạn tồn tại và hữu hạn, ta nói tích phân suy rộng là hội tụ, còn ngược lại (hoặc giới hạn không tồn tại, hoặc giới hạn bằng vô cùng), ta nói tích phân suy rộng là phân kỳ.

Định nghĩa 3.2.

Cho $f(x)$ xác định trên $(-\infty, b]$ và khả tích trên mọi đoạn $[a, b]$, với $a < b$. Đặt

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)dx = \lim_{a \to -\infty} \int_{a}^{b} f(x)dx$$

và gọi là tích phân suy rộng loại 1 của $f(x)$ trên $(-\infty, b]$. Nếu giới hạn tồn tại và hữu hạn, ta nói tích phân suy rộng là hội tụ, còn ngược lại (hoặc giới hạn không tồn tại, hoặc giới hạn bằng vô cùng), ta nói tích phân suy rộng là phân kỳ.

Định nghĩa 3.3.

Cho hàm $f(x)$ khả tích trên mọi đoạn hữu hạn. Nếu với một số thực a nào đó, hai tích phân suy rộng $\int\limits_{-\infty}^{a} f(x)dx$ và $\int\limits_{a}^{+\infty} f(x)dx$ tồn tại thì đặt

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int\limits_{-\infty}^{a} f(x)dx + \int\limits_{a}^{+\infty} f(x)dx$$

Tích phân $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ được gọi là hội tụ nếu tổng ở vế phải hữu hạn.

Ví dụ 3.1.

Tính tích phân suy rộng : $\displaystyle\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2(x+2)}$

- Theo định nghĩa, $I = \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2(x+2)} = \lim_{b\to+\infty} \int_1^b \frac{dx}{x^2(x+2)}$
- Tách hàm dưới dấu tích phân $\dfrac{1}{x^2(x+2)} = \dfrac{A}{x} + \dfrac{B}{x^2} + \dfrac{C}{x+2}$ Đồng nhất các hệ số ở hai vế ta tìm được $A = -\dfrac{1}{4}, B = \dfrac{1}{2}, C = \dfrac{1}{4}$
- $I(b) = \dfrac{1}{4}\displaystyle\int\limits_1^b \left(\frac{-1}{x} + \frac{2}{x^2} + \frac{1}{x+2}\right) dx = \frac{1}{4}\ln\left(\frac{b+2}{b}\right) - \frac{1}{2b} + \frac{2-\ln 3}{4}$
- Tính $\displaystyle\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2(x+2)} = \lim_{b\to+\infty} I(b) = \frac{2-\ln 3}{4}$

Ví dụ 3.2.

Tính tích phân suy rộng: $I = \int_0^{+\infty} e^{-\sqrt{x}} dx$

- $I = \int_0^{+\infty} e^{-\sqrt{x}} dx = \lim\limits_{b \to +\infty} \int_0^b e^{-\sqrt{x}} dx$
- Đặt $\sqrt{x} = t$, ta có $x = t^2$ và $dx = 2t.dt$, $\int\limits_0^b e^{-\sqrt{x}} dx = \int\limits_0^{\sqrt{b}} 2te^{-t} dt$
- $\int\limits_0^b e^{-\sqrt{x}} dx = \int\limits_0^{\sqrt{b}} (-2t) d(e^{-t}) = -2te^{-t}\Big|_0^{\sqrt{b}} + 2\int\limits_0^{\sqrt{b}} e^{-t} dt = -2\sqrt{b}.e^{-\sqrt{b}} - 2e^{-\sqrt{b}} + 2$
- $I = \lim\limits_{b \to +\infty} \left(2\sqrt{b}.e^{-\sqrt{b}} - 2e^{-\sqrt{b}} + 2\right) = 2 + \lim\limits_{b \to +\infty} \dfrac{\left(2\sqrt{b} - 2\right)}{e^{\sqrt{b}}} = 2$ (Áp dụng quy tắc L'Hospital).

Ví dụ 3.3.

Tính tích phân suy rộng: $\displaystyle\int\limits_0^{+\infty} x^3.e^{-x^2}dx.$

- Theo định nghĩa $I = \lim\limits_{b\to+\infty}\displaystyle\int\limits_0^b x^3.e^{-x^2}dx$. Đặt $t = -x^2$, ta có

$$I(b) = \int_0^b x^3e^{-x^2}dx = \frac{1}{2}\int\limits_0^{-b^2} t.e^t.dt$$

- Tích phân từng phần $\begin{cases} u & = & t \\ dv & = & e^tdt \end{cases} \Longrightarrow I(b) = \frac{1}{2}(te^t - e^t)\Big|_0^{-b^2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}e^{-b^2}(b^2+1)$

- $I = \displaystyle\int\limits_0^{+\infty} x^3e^{-x^2}dx = -\frac{1}{2}\lim_{b\to+\infty}\left[\frac{b^2+1}{e^{b^2}}\right] + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$

Ví dụ 3.4.

Tính tích phân suy rộng $I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2 + 2x + 10}$.

- $I = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2 + 2x + 10} = \int\limits_{-\infty}^{a} \frac{dx}{x^2 + 2x + 10} + \int\limits_{a}^{+\infty} \frac{dx}{x^2 + 2x + 10}$.
- Tính: $\int\limits_{-\infty}^{a} \frac{dx}{x^2 + 2x + 10} = \int\limits_{-\infty}^{a} \frac{dx}{(x+1)^2 + 9} = \lim\limits_{b \to -\infty} \int\limits_{b}^{a} \frac{dx}{(x+1)^2 + 9}$

  $= \lim\limits_{b \to -\infty} \frac{1}{3} \arctan \frac{x+1}{3} \Big|_b^a = \frac{1}{3} \arctan \frac{a+1}{3} + \frac{\pi}{6}$
- Tương tự $\int\limits_{a}^{+\infty} \frac{dx}{x^2 + 2x + 10} = \frac{\pi}{6} - \frac{1}{3} \arctan \frac{a+1}{3}$.
- Vậy $I = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{3}$.

Ví dụ 3.5.

Tính tích phân suy rộng $I = \int\limits_1^{+\infty} \frac{\arctan x}{x^3} dx = \lim\limits_{b \to +\infty} \int\limits_1^{b} \frac{\arctan x}{x^3} dx$.

- $I(b) = \int\limits_1^{b} \frac{\arctan x}{x^3} dx = -\frac{\arctan x}{2x^2}\Big|_1^b + \int\limits_1^{b} \frac{1}{2x^2(x^2+1)} dx$
- $I(b) = \left(-\frac{\arctan x}{2x^2} - \frac{1}{2x} - \frac{\arctan x}{2}\right)\Big|_1^b = -\frac{\arctan b}{2b^2} - \frac{1}{2b} - \frac{\arctan b}{2} + \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}$
- $I = \lim\limits_{b \to +\infty} \left(-\frac{\arctan b}{2b^2} - \frac{1}{2b} - \frac{\arctan b}{2} + \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$.

Ví dụ 3.6.

Xét tích phân suy rộng $I = \int_a^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha}, \; a > 0, \alpha \in \mathbb{R}.$

1. Nếu $\alpha = 1$ thì $I = \int_a^{+\infty} \frac{dx}{x} = \lim_{b \to +\infty} \int_a^b \frac{dx}{x} = \lim_{b \to +\infty} \ln x \Big|_a^b = \lim_{b \to +\infty} (\ln b - \ln a) = +\infty.$
   Vậy tích phân phân kỳ.
2. Nếu $\alpha \neq 1$ thì

$$I = \int\limits_a^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha} = \lim_{b \to +\infty} \int\limits_a^b x^{-\alpha} dx = \lim_{b \to +\infty} \frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha}\Big|_a^b$$

$$= \lim_{b \to +\infty} \frac{1}{1-\alpha}\left(b^{1-\alpha} - a^{1-\alpha}\right) = \begin{cases} +\infty & \text{nếu } \alpha < 1 \\ \dfrac{a^{1-\alpha}}{1-\alpha} & \text{nếu } \alpha > 1 \end{cases}$$

Ghi nhớ:

Tích phân suy rộng $\displaystyle\int_a^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha} (a > 0)$ $\begin{cases} \text{hội tụ} & \text{nếu } \alpha > 1, \\ \text{phân kỳ} & \text{nếu } \alpha \le 1. \end{cases}$

Tương tự $\displaystyle\int_{-\infty}^{a} \frac{dx}{x^\alpha} (a < 0)$ $\begin{cases} \text{hội tụ} & \text{nếu } \alpha > 1, \\ \text{phân kỳ} & \text{nếu } \alpha \le 1. \end{cases}$

Đây là kết quả quan trọng và được sử dụng nhiều trong các bài tập.

Định lý 3.1.

Cho $f(x)$ và $g(x)$ xác định và khả tích trên mọi $[a, b]$, với $b > a$ và

$$0 \leq f(x) \leq g(x), \forall x \in [a, +\infty).$$

Khi đó,

1. Nếu $\int\limits_a^{+\infty} g(x)dx$ hội tụ thì $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ cũng hội tụ,
2. Nếu $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ phân kỳ thì $\int\limits_a^{+\infty} g(x)dx$ cũng phân kỳ.

Định lý 3.2.

Cho $f(x)$ và $g(x)$ là những hàm không âm, xác định và khả tích trên mọi $[a,b]$, với $b > a$ và $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{g(x)} = k, (0 < k < +\infty)$. Khi đó, $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x)dx$ và $\displaystyle\int_a^{+\infty} g(x)dx$ hoặc cùng hội tụ, hoặc cùng phân kỳ.

Nhận xét 2.

Từ Định lý trên, ta thấy rằng, nếu $f(x)$ và $g(x)$ là hai VCB tương đương khi $x \to +\infty$ thì các tích phân $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x)dx$ và $\displaystyle\int_a^{+\infty} g(x)dx$ hoặc cùng hội tụ, hoặc cùng phân kỳ.

Tích phân hội tụ tuyệt đối, bán hội tụ

Định lý 3.3.

Nếu $\int\limits_a^{+\infty} |f(x)|dx$ hội tụ thì $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ cũng hội tụ.

Định nghĩa 3.4.

1. $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ được gọi là hội tụ tuyệt đối nếu $\int\limits_a^{+\infty} |f(x)|dx$ hội tụ.
2. $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ được gọi là bán hội tụ (hội tụ tương đối) nếu $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ hội tụ còn $\int^{+\infty} |f(x)|dx$ phân kỳ.

Ví dụ 3.7.

Xét sự hội tụ của tích phân suy rộng: $I = \int\limits_1^{+\infty} \left(\tan\frac{1}{x} - \sin\frac{1}{x}\right) dx.$

- Đây là tích phân suy rộng loại 1 với điểm vô cực là $+\infty$
- Ta có $\tan x - \sin x = \tan x(1 - \cos x) \sim \frac{x^3}{2}$ khi $x \to 0$
- $\tan\frac{1}{x} - \sin\frac{1}{x} \sim \frac{1}{2x^3}$ khi $x \to +\infty$.
- Tích phân suy rộng $\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{2x^3}$ là hội tụ.
- Như vậy $I = \int\limits_1^{+\infty} \left(\tan\frac{1}{x} - \sin\frac{1}{x}\right) dx$ cũng hội tụ.

Ví dụ 3.8.

Xét sự hội tụ của tích phân suy rộng: $I = \int\limits_1^{+\infty} \frac{\sqrt{x}dx}{\sqrt{1+2x+x^3}}$

- Đây là tích phân suy rộng loại 1 với điểm vô cực là $+\infty$
- Ta có $\sqrt{1+2x+x^3} \sim x^{\frac{3}{2}}$ khi $x \to +\infty$.
- Khi đó $\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{1+2x+x^3}} \sim \frac{\sqrt{x}}{x^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{x}$ khi $x \to +\infty$.
- Tích phân suy rộng $\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x}$ là phân kì.
- Như vậy $I = \int\limits_1^{+\infty} \frac{\sqrt{x}dx}{\sqrt{1+2x+x^3}}$ cũng phân kì.

Ví dụ 3.9.

Xét sự hội tụ của tích phân suy rộng: $I = \int\limits_{1}^{+\infty} \dfrac{x\,dx}{\sqrt{1 + x^5 + \ln x}}$

- Đây là tích phân suy rộng loại 1 với điểm vô cực là $+\infty$
- Ta có $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{x^5} \overset{L}{=} \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{5x^5} = 0$, hay x^5 là VCL có bậc cao hơn $\ln x$ khi $x \to +\infty$
- Như vậy, khi $x \to +\infty$, ta có $1 + x^5 + \ln x \sim x^5$ (VCL) $\Longrightarrow \dfrac{x}{\sqrt{1 + x^5 + \ln x}} \sim \dfrac{1}{x\sqrt{x}}$ (VCB) khi $x \to +\infty$.
- Tích phân suy rộng $\int\limits_{1}^{+\infty} \dfrac{dx}{x\sqrt{x}}$ hội tụ nên tích phân đã cho cũng hội tụ.

Định nghĩa 4.1.

Cho hàm số $f(x)$ xác định và khả tích trên mọi đoạn $[a, b-\epsilon]$ (với $\epsilon > 0$ bé tùy ý) và $\lim\limits_{x \to b^-} f(x) = \infty$ (b gọi là điểm bất thường, điểm vô cực). Đặt

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\epsilon \to 0^+} \int_a^{b-\epsilon} f(x)dx$$

và gọi là tích phân suy rộng loại 2 của $f(x)$ trên $[a, b]$.
Tích phân được gọi là hội tụ nếu giới hạn ở vế phải tồn tại và hữu hạn, trong trường hợp ngược lại tích phân được gọi là phân kỳ.

Định nghĩa 4.2.

Cho hàm số $f(x)$ xác định và khả tích trên mọi đoạn $[a+\epsilon, b]$ (với $\epsilon > 0$ bé tùy ý) và $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = \infty$ (a gọi là điểm bất thường, điểm vô cực). Đặt

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \lim_{\epsilon\to 0^+} \int\limits_{a+\epsilon}^b f(x)dx$$

và gọi là tích phân suy rộng loại 2 của $f(x)$ trên $[a, b]$.
Tích phân được gọi là hội tụ nếu giới hạn ở vế phải tồn tại và hữu hạn, trong trường hợp ngược lại tích phân được gọi là phân kỳ.

Ví dụ 4.1.

Tính tích phân suy rộng $I = \int\limits_0^2 \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}}$.

- Đây là tích phân suy rộng loại 2 với điểm bất thường ở cận trên $x = 2$.
- $I = \int\limits_0^2 \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}} = \lim\limits_{\epsilon \to 0^+} \int\limits_0^{2-\epsilon} \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}}$
- Ta có: $\int\limits_0^{2-\epsilon} \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}} = \arcsin \frac{x}{2}\Big|_0^{2-\epsilon} = \arcsin\left(1 - \frac{\epsilon}{2}\right)$
- $I = \lim\limits_{\epsilon \to 0^+} \arcsin\left(1 - \frac{\epsilon}{2}\right) = \frac{\pi}{2}$.

Ví dụ 4.2.

Tính tích phân suy rộng $I = \int\limits_1^2 \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}}$.

- Tích phân có điểm bất thường là cận dưới $x = 1$.
- $I = \int\limits_1^2 \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}} = \lim\limits_{\epsilon \to 0^+} \int\limits_{1+\epsilon}^2 \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}}$
- Tính $\int\limits_{1+\epsilon}^2 \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}} = \ln\left(x + \sqrt{x^2-1}\right)\Big|_{1+\epsilon}^2 = \ln(2+\sqrt{3}) - \ln(1+\epsilon+\sqrt{(1+\epsilon)^2-1})$
- $I = \lim\limits_{\epsilon \to 0^+} \left[\ln(2+\sqrt{3}) - \ln(1+\epsilon+\sqrt{(1+\epsilon)^2-1})\right] = \ln(2+\sqrt{3})$

Ví dụ 4.3.

Xét tích phân suy rộng $I = \int\limits_a^b \frac{dx}{(b-x)^\alpha}$, $a < b, \alpha > 0$.

Tích phân có điểm bất thường là cận trên $x = b$.

1. Nếu $\alpha = 1$ thì
$I = \int_a^b \frac{dx}{b-x} = \lim\limits_{\epsilon\to 0^+} \int_a^{b-\epsilon} \frac{dx}{b-x} = -\lim\limits_{\epsilon\to 0^+} \ln(b-x)\Big|_a^{b-\epsilon} = \lim\limits_{\epsilon\to 0^+} \big(\ln(b-a)-\ln\epsilon\big) = +\infty.$
2. Nếu $0 < \alpha \neq 1$ thì

$$I = \int\limits_a^b \frac{dx}{(b-x)^\alpha} = \lim_{\epsilon\to 0^+} \int\limits_a^{b-\epsilon} (b-x)^{-\alpha}dx = -\lim_{\epsilon\to 0^+} \frac{(b-x)^{1-\alpha}}{1-\alpha}\Bigg|_a^{b-\epsilon}$$

$$= \lim_{\epsilon\to 0^+} \frac{1}{\alpha-1}\left(\epsilon^{1-\alpha} - (b-a)^{1-\alpha}\right) = \begin{cases} +\infty & \text{nếu } \alpha > 1 \\ \dfrac{(b-a)^{1-\alpha}}{1-\alpha} & \text{nếu } \alpha < 1 \end{cases}$$

Tính tích phân suy rộng loại 2

Ghi nhớ:

Tích phân suy rộng $\displaystyle\int_a^b \frac{dx}{(b-x)^\alpha}$ $\begin{cases} \text{hội tụ} & \text{nếu } \alpha < 1, \\ \text{phân kỳ} & \text{nếu } \alpha \geq 1. \end{cases}$

Tương tự $\displaystyle\int_a^b \frac{dx}{(x-a)^\alpha}$ $\begin{cases} \text{hội tụ} & \text{nếu } \alpha < 1, \\ \text{phân kỳ} & \text{nếu } \alpha \geq 1. \end{cases}$

Trong trường hợp $\alpha \leq 0$ thì đây là các tích phân xác định thông thường và là tích phân hội tụ.

Định lý 4.1.

Cho $f(x)$ và $g(x)$ xác định và khả tích trên mọi $[a, b-\epsilon]$, với $\epsilon > 0$ bé tùy ý , $\lim\limits_{x\to b^-} f(x) = \lim\limits_{x\to b^-} g(x) = \infty$ và

$$0 \leq f(x) \leq g(x), \forall x \in [a, b).$$

Khi đó,

1. Nếu $\int\limits_a^b g(x)dx$ hội tụ thì $\int\limits_a^b f(x)dx$ cũng hội tụ,
2. Nếu $\int\limits_a^b f(x)dx$ phân kỳ thì $\int\limits_a^b g(x)dx$ cũng phân kỳ.

Các tiêu chuẩn hội tụ của tích phân suy rộng loại 2

Định lý 4.2.

Cho $f(x)$ và $g(x)$ là những hàm không âm, xác định và khả tích trên mọi $[a, b-\epsilon]$, với $\epsilon > 0$ bé tùy ý , $\lim\limits_{x\to b^-} f(x) = \lim\limits_{x\to b^-} g(x) = \infty$ và $\lim\limits_{x\to b^-} \dfrac{f(x)}{g(x)} = k, (0 < k < +\infty)$. Khi đó, $\int\limits_a^b f(x)dx$ và $\int\limits_a^b g(x)dx$ hoặc cùng hội tụ, hoặc cùng phân kỳ.

Nhận xét 3.

Từ Định lý trên, ta thấy rằng, nếu $f(x)$ và $g(x)$ là hai VCL tương đương khi $x \to b^-$ thì các tích phân $\int\limits_a^b f(x)dx$ và $\int\limits_a^b g(x)dx$ hoặc cùng hội tụ, hoặc cùng phân kỳ.

Ví dụ 4.4.

Xét sự hội tụ của tích phân: $\int\limits_0^1 \frac{dx}{x-\sin x}$

- Đây là tích phân suy rộng loại 2 với $x=0$ là điểm bất thường.
- Hai hàm $\frac{1}{x-\sin x}, \frac{1}{x}$ khả tích trên mọi đoạn $[\epsilon, 1], \forall 0<\epsilon<1$, có giới hạn vô cực tại $x=0$ và $\frac{1}{x-\sin x} > \frac{1}{x} > 0, \forall x \in (0,1]$.
- Tích phân $\int\limits_0^1 \frac{dx}{x}$ phân kỳ nên tích phân $\int\limits_0^1 \frac{dx}{x-\sin x}$ cũng phân kỳ.

Ví dụ 4.5.

Xét sự hội tụ của tích phân: $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1-\cos x}{x^3} dx$

- Đây là tích phân suy rộng loại 2 với điểm bất thường là cận dưới $x = 0$.
- Ta có $1 - \cos x \sim \frac{x^2}{2}$ (VCB) khi $x \to 0^+$,
$\Longrightarrow \frac{1-\cos x}{x^3} \sim \frac{1}{2x}$(VCL) khi $x \to 0^+$.
- Tích phân $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{2x}$ phân kỳ.
- Như vậy tích phân $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1-\cos x}{x^3} dx$ cũng phân kỳ.

Ví dụ 4.6.

Xét sự hội tụ của tích phân suy rộng: $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\sqrt[3]{\cos x}}$

- Đây là tích phân suy rộng loại 2 với điểm vô cực là $\frac{\pi}{2}$ vì hàm số không xác định tại $\frac{\pi}{2}$ và $\displaystyle\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-} \frac{1}{\sqrt[3]{\cos x}} = \infty$.
- Ta có $\cos x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \sim \left(\frac{\pi}{2} - x\right)$ (VCB) khi $x \to \frac{\pi}{2}^-$.
- $\dfrac{1}{\sqrt[3]{\cos x}} \sim \dfrac{1}{\left(\frac{\pi}{2} - x\right)^{1/3}}$ (VCL) khi $x \to \frac{\pi}{2}^-$.
- Tích phân suy rộng $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\left(\frac{\pi}{2} - x\right)^{1/3}}$ hội tụ nên tích phân đã cho cũng hội tụ.

Ví dụ 4.7.

Xét sự hội tụ của tích phân: $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{\sin x + \sqrt[3]{x}}$

- Đây là tích phân suy rộng loại 2 với điểm vô cực là cận dưới $x = 0$.
- Khi $x \to 0^+$, thì $\sin x \sim x$ nên $\sin x + \sqrt[3]{x} \sim \sqrt[3]{x}$ (VCB)
- Vậy $\dfrac{1}{\sin x + \sqrt[3]{x}} \sim \dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}$ khi $x \to 0^+$ (VCL)
- Tích phân $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{x}} = \int_0^1 \frac{dx}{(x-0)^{1/3}}$ hội tụ.
- Như vậy, theo tiêu chuẩn tương đương, tích phân $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{\sin x + \sqrt[3]{x}}$ hội tụ.

5. Ứng dụng của tích phân xác định

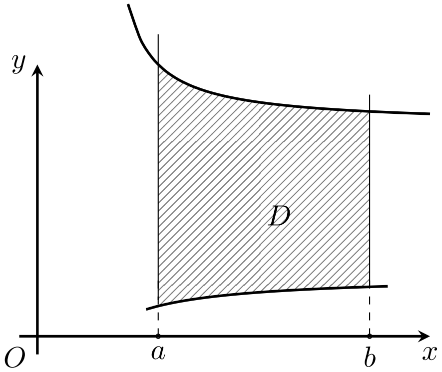
Ta xét 3 ứng dụng trong hình học của tích phân xác định

1. Tính diện tích của hình phẳng.
2. Tính độ dài của dây cung.
3. Tính thể tích của vật thể tròn xoay.

TH1. Miền D là hình thang cong:

$$D = \begin{cases} a \le & x \le & b, \\ f_1(x) \le & y \le & f_2(x), \end{cases}$$

và các hàm $f_1(x), f_2(x)$ liên tục, đơn trị, $f_1(x) \le f_2(x)$ với mọi $x \in [a, b]$.



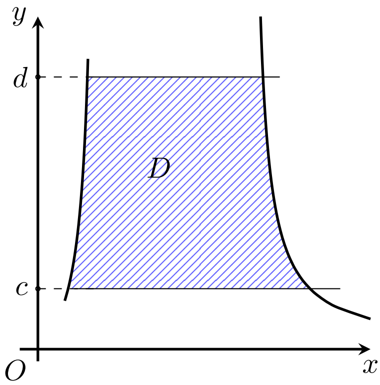
$$S_D = \int_a^b [f_2(x) - f_1(x)]\, dx$$

TH2. Miền D là hình thang cong:

$$D = \begin{cases} c \leq y \leq d, \\ g_1(y) \leq x \leq g_2(y), \end{cases}$$

và các hàm $g_1(y), g_2(y)$ liên tục, đơn trị, $g_1(y) \leq g_2(y)$ với mọi $y \in [c, d]$.

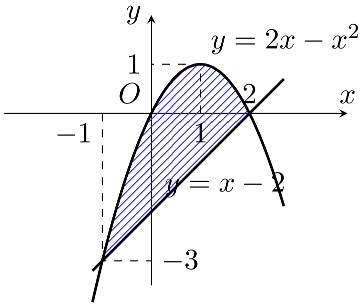
$$I = \int_c^d [g_2(y) - g_1(y)]\, dy$$



Ví dụ 5.1.

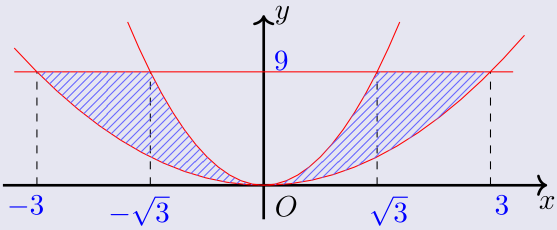
Tính diện tích của hình phẳng D giới hạn bởi các đường $y = 2x - x^2$ và $y = x - 2$.

- Tọa độ giao điểm của hai đường $(-1, -3)$ và $(2, 0)$.
- Xác định $D = \begin{cases} -1 \le x \le 2, \\ x - 2 \le y \le 2x - x^2. \end{cases}$
- $I = \displaystyle\int_{-1}^{2} dx[(2x - x^2) - (x - 2)].dx$
- $I = \displaystyle\int_{-1}^{2} (2 + x - x^2).dx = \dfrac{9}{2}.$



Ví dụ 5.2.

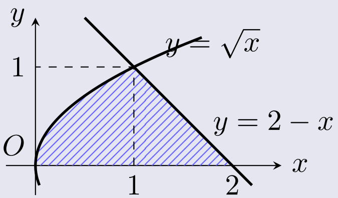
Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi: $y = x^2, y = 3x^2, y = 9$.



- Do tính đối xứng nên diện tích: $S = 2\left[\int\limits_0^{\sqrt{3}} (3x^2 - x^2)dx + \int\limits_{\sqrt{3}}^{3} (9 - x^2)dx\right]$
- $S = 2\left[\int\limits_0^{\sqrt{3}} 2x^2dx + \int\limits_{\sqrt{3}}^{3} (9 - x^2)dx\right] = 36 - 12\sqrt{3}$

Ví dụ 5.3.

Tính diện tích miền phẳng D giới hạn bởi các đường: $y = \sqrt{x}$, $x + y = 2$, $y = 0$.



- Vẽ hình và xác định $D = \begin{cases} 0 \le y \le 1, \\ y^2 \le x \le 2 - y. \end{cases}$
- $S_D = \int\limits_0^1 \left[(2 - y) - y^2\right] dy$
- $S_D = \left(2y - \frac{y^2}{2} - \frac{y^3}{3}\right)\Big|_0^1 = \frac{7}{6}.$

TH3. Miền D là hình phẳng giới hạn bởi đường cong có phương trình tham số:

$$D = \begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t) \\ t_1 \leq t \leq t_2 \end{cases}$$

Các hàm $x(t), y(t)$ khả vi liên tục trên $[t_1, t_2]$, thì

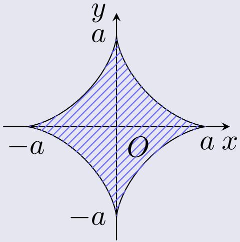
$$S_D = \int\limits_{t_1}^{t_2} |y(t).x'(t)| dt$$

hoặc

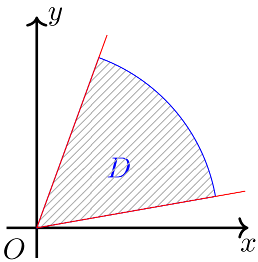
$$S_D = \int\limits_{t_1}^{t_2} |x(t).y'(t)| dt$$

Ví dụ 5.4.

Tính diện tích của hình phẳng giới hạn bởi đường Axtroit
$\begin{cases} x = a.\cos^3 t \\ y = a\sin^3 t, \end{cases} \quad (0 \le t \le 2\pi)$
$a > 0$ là hằng số.
$x'(t) = -3a\cos^2 t \sin t$



- $S = \int\limits_0^{2\pi} |y(t)x'(t)|dt = 3a^2 \int\limits_0^{2\pi} \sin^4 t \cos^2 t dt$
- $\sin^4 t\cos^2 t = \frac{1}{4}\sin^2 2t \sin^2 t = \frac{1}{16}(1-\cos 4t)(1-\cos 2t)$
  $= \frac{1}{16}\left(1 - \cos 2t - \cos 4t + \frac{\cos 6t + \cos 2t}{2}\right)$
- Thay vào ta có $S = \frac{3a^2\pi}{8}$



TH4. Miền D là hình phẳng giới hạn bởi đường cong có phương trình trong tọa độ cực:

$$D = \begin{cases} r = r(\varphi), \\ \alpha \leq \varphi \leq \beta \end{cases}$$

thì

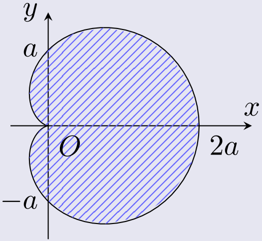
$$S_D = \frac{1}{2}\int\limits_{\alpha}^{\beta} [r(\varphi)]^2 \, d\varphi$$

Ví dụ 5.5.

Tính diện tích của hình phẳng giới hạn bởi đường Cacdioit

$$r = a(1+\cos\varphi),$$

$a > 0$ là hằng số.



- Đường Cacđiôit đối xứng qua trục cực (Ox).
- Diện tích $S = 2.\dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^{\pi} a^2(1+\cos\varphi)^2 d\varphi$
- $S = a^2 \displaystyle\int_0^{\pi} \left(1 + 2\cos\varphi + \frac{1+\cos 2\varphi}{2}\right) d\varphi$
- $S = a^2 \left(\dfrac{3}{2}\varphi + 2\sin\varphi + \dfrac{\sin 2\varphi}{4}\right)\Big|_0^{\pi} = \dfrac{3a^2\pi}{2}$

Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi

1. (E): $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$.
2. Một cung (một nhịp) Xicloit

$$\begin{cases} x = a(t - \sin t) \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases} \quad (0 \leq t \leq 2\pi)$$

   và trục Ox.
3. $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}, \ a > 0$.
4. $r = a(1 + \cos\varphi); \ \ 0 \leq \varphi \leq 2\pi, \ a > 0$.
5. $y = x^2, \ y = 4x^2, \ y = 4$.
6. $y = -\sqrt{4 - x^2}$ và $x^2 + 3y = 0$.

1. Nếu đường cong $\overset{\frown}{AB}$ có phương trình $y = f(x)$, $a \le x \le b$ thì độ dài của dây cung $\overset{\frown}{AB}$ là

$$\boxed{l_{\overset{\frown}{AB}} = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}dx}$$

2. Nếu đường cong $\overset{\frown}{AB}$ có phương trình $x = g(y)$, $c \le y \le d$ thì độ dài của dây cung $\overset{\frown}{AB}$ là

$$\boxed{l_{\overset{\frown}{AB}} = \int_c^d \sqrt{1 + (g'(y))^2}dy}$$

- Nếu $\widetilde{AB}$ có phương trình tham số $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$ $(t_1 \leq t \leq t_2)$ thì độ dài của dây cung $\widetilde{AB}$ là

$$\boxed{l_{\widetilde{AB}} = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt}$$

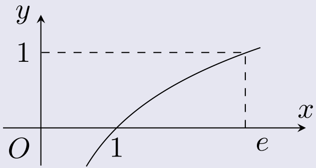
- Nếu đường cong $\widetilde{AB}$ có phương trình trong tọa độ cực $\begin{cases} r = r(\varphi) \\ \alpha \leq \varphi \leq \beta \end{cases}$ thì độ dài dây cung $\widetilde{AB}$ là

$$\boxed{l_{\widetilde{AB}} = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{(r(\varphi))^2 + (r'(\varphi))^2} d\varphi}$$

Ví dụ 5.6.

Tính độ dài đường cong:

$$y = \ln x,\ 1 \le x \le e$$



$$L = \int_1^e \sqrt{1 + (y')^2}dx = \int_1^e \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}dx = \int_1^e \frac{\sqrt{1+x^2}}{x}dx.$$

Đặt $\sqrt{1+x^2} = t$, ta có: $L = \int\limits_{\sqrt{2}}^{\sqrt{1+e^2}} \frac{t^2}{t^2-1}dt = \int\limits_{\sqrt{2}}^{\sqrt{1+e^2}} \left(1 + \frac{1}{t^2-1}\right)dt.$

$$L = \left(t + \frac{1}{2}\ln\frac{t-1}{t+1}\right)\Bigg|_{\sqrt{2}}^{\sqrt{1+e^2}}$$

$$L = \sqrt{1+e^2} - \sqrt{2} + \frac{1}{2}\ln\frac{\sqrt{1+e^2}-1}{\sqrt{1+e^2}+1} - \frac{1}{2}\ln\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}.$$

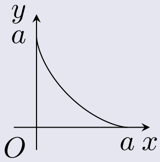
Ví dụ 5.7.

Tính độ dài đường cong:$y = x\sqrt{x}, \quad 1 \le x \le 2.$

- $L = \int\limits_1^2 \sqrt{1 + (y')^2} dx = \int\limits_1^2 \sqrt{1 + \left(\frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}\right)^2} dx = \int\limits_1^2 \sqrt{1 + \frac{9}{4}x} dx$
- Đặt $\sqrt{1 + \frac{9}{4}x} = t$, ta có $L = \int\limits_{\frac{\sqrt{13}}{2}}^{\frac{\sqrt{22}}{2}} \frac{8}{9}t^2 dt$
- $L = \frac{8}{27}t^3 \Big|_{\frac{\sqrt{13}}{2}}^{\frac{\sqrt{22}}{2}} = \frac{8}{27}\left(\frac{22\sqrt{22} - 13\sqrt{13}}{8}\right) = \frac{22\sqrt{22} - 13\sqrt{13}}{27}$

Ví dụ 5.8.

Tính độ dài đường cong: $\begin{cases} x = a\cos^3 t \\ y = a\sin^3 t \end{cases}$, $0 \le t \le \dfrac{\pi}{2}$.



- $x^{'}(t) = 3a.\cos^2 t.(-\sin t),\ y^{'}(t) = 3a.\sin^2 t.\cos t,\ 0 \le t \le \dfrac{\pi}{2}$.
- $L = 3a\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt = 3a\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\sin^2 t.\cos^2 t}.dt$
- $L = \dfrac{3a}{}\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\frac{1}{4}\sin^2 2t} dt = 3a\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2t dt = -\frac{3a}{4}\cos 2t\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}$
- $L = \dfrac{3a}{2}$.

Ví dụ 5.9.

Tính độ dài đường cong: $\begin{cases} x = a(t - \sin t) \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases}, \quad 0 \le t \le 2\pi$

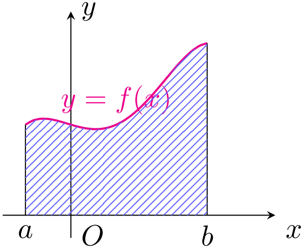
- $x'(t) = a(1 - \cos t);\ y'(t) = a.\sin t$
- $L = \int\limits_0^{2\pi} \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt = \int\limits_0^{2\pi} \sqrt{a^2(1 - \cos t)^2 + a^2.\sin^2 t} dt$
- $L = |a| \int\limits_0^{2\pi} \sqrt{2 - 2\cos t} dt = |a| \int\limits_0^{2\pi} \sqrt{4\sin^2 \frac{t}{2}} dt$
- $L = 2|a| \int\limits_0^{2\pi} \sin \frac{t}{2} dt = -4|a| \cos \frac{t}{2} \Big|_0^{2\pi} = 8|a|$

Tính độ dài của dây cung

1. $x = \frac{1}{4}y^2 - \frac{1}{2}\ln y, \quad 1 \le y \le e.$
2. $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}, \quad a > 0.$
3. $r = a(1 + \cos\varphi),\ a > 0.$
4. $y = \arcsin\left(e^{-x}\right)\ ; \quad 0 \le x \le 1$
5. $r = 2\varphi, \quad 0 \le \varphi \le 2\pi.$

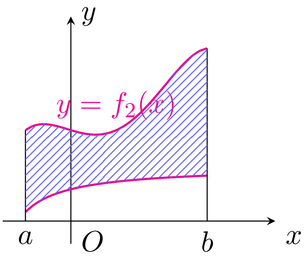
1. Nếu quay hình phẳng giới hạn bởi $T = \begin{cases} 0 \le y \le f(x) \\ a \le x \le b \end{cases}$ quanh trục Ox thì ta thu được vật thể tròn xoay. Khi đó thể tích của vật thể tạo thành là

$$\boxed{V_{Ox} = \pi \int_a^b [f(x)]^2 dx.}$$



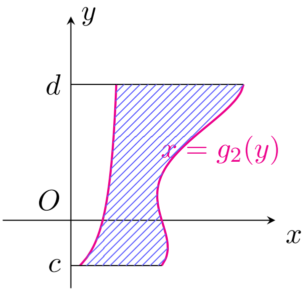
1. Nếu quay hình phẳng giới hạn bởi $T = \begin{cases} 0 < f_1(x) \le y \le f_2(x) \\ a \le x \le b \end{cases}$ quanh trục Ox thì ta thu được vật thể tròn xoay. Khi đó thể tích của vật thể tạo thành là

$$\boxed{V_{Ox} = \pi \int\limits_a^b [f_2^2(x) - f_1^2(x)]dx.}$$



1. Nếu quay hình phẳng giới hạn bởi $T = \begin{cases} 0 < g_1(y) \leq y \leq g_2(y) \\ c \leq y \leq d \end{cases}$ quanh trục Oy thì ta thu được vật thể tròn xoay. Khi đó thể tích của vật thể tạo thành là

$$\boxed{V_{Oy} = \pi \int\limits_c^d [g_2^2(y) - g_1^2(y)]dy.}$$

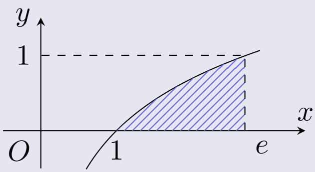


Ví dụ 5.10.

Tính thể tích của vật thể tạo thành khi quay hình phẳng giới hạn bởi các đường

$$y = \ln x;\ \ y = 0;\ \ x = e$$

quanh trục Ox.



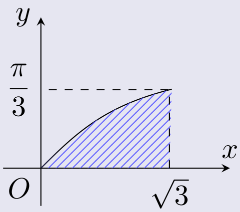
- $\ln x = 0 \Leftrightarrow x = 1.$
- $V = \pi \int\limits_1^e \ln^2 x dx.$
- Tích phân từng phần: $V = \pi \left(x \ln^2 x \Big|_1^e - \int\limits_1^e 2 \ln x dx \right) = \pi \left(e - 2x \ln x \Big|_1^e + 2 \int\limits_1^e dx \right).$
- $V = \pi(e - 2)$

Ví dụ 5.11.

Tính thể tích vật thể tạo thành khi quay hình phẳng giới hạn bởi

$$y = \arctan x;\ \ y = 0;\ \ x = \sqrt{3}$$

quanh trục Oy.



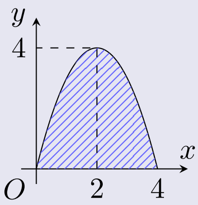
- $y = \arctan x \Rightarrow x = \tan y$. Xét $\tan y = \sqrt{3} \Leftrightarrow y = \dfrac{\pi}{3}$.
- $V = \pi \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{3}} (3 - \tan^2 y) dy = 3\pi y \Big|_0^{\frac{\pi}{3}} - \pi \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{3}} \tan^2 y dy = \pi^2 - \pi \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{3}} \tan^2 y dy$
- $\pi \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{3}} \tan^2 y dy = \pi \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{3}} \left(\frac{1}{\cos^2 y} - 1 \right) dy = \pi \left(\sqrt{3} - \frac{\pi}{3} \right)$
- $V = \dfrac{4\pi^2}{3} - \pi\sqrt{3}$.

Ví dụ 5.12.

Tính thể tích vật thể tạo thành khi quay hình phẳng giới hạn bởi

$$y = 4x - x^2 \text{ và } y = 0$$

quanh trục Oy.



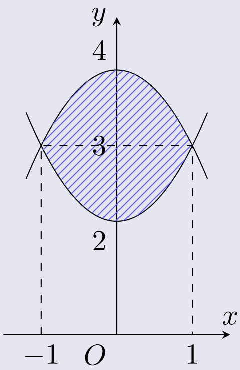
- $y = 4x - x^2 \Leftrightarrow y = 4 - (x-2)^2 \Leftrightarrow x = 2 \pm \sqrt{4-y}$, $(y \leq 4)$.
- $V = \pi \int\limits_0^4 \left(2 + \sqrt{4-y}\right)^2 dy - \pi \int\limits_0^4 \left(1 - \sqrt{4-y}\right)^2 dy.$
- $V = 4\pi \int\limits_0^4 \sqrt{4-y}dy = \dfrac{-8\pi}{3}\sqrt{(4-y)^3}\Big|_0^4 = \dfrac{64\pi}{3}.$

Ví dụ 5.13.

Tính thể tích vật thể tạo thành khi quay hình phẳng giới hạn bởi

$$y = 4 - x^2 \text{ và } y = 2 + x^2$$

quanh trục Ox.



- $V = \pi \int\limits_{-1}^{1} |(4 - x^2)^2 - (2 + x^2)^2| dx = 12\pi \int\limits_{-1}^{1} |1 - x^2| dx$
- $V = 12\pi \int\limits^{1} (1 - x^2) dx = 12\pi \left(x - \frac{1}{3} x^3 \right) \Big|^{1} = 16\pi$

Bài tập

Tính thể tích của vật thể tạo thành khi quay hình phẳng giới hạn bởi:

1. $y = 2x - x^2, \; y = 0$ quanh trục Ox.
2. $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}, \;\; a > 0$ quanh trục Ox.
3. $x^2 + (y-2)^2 = 1$ quanh Ox.
4. $y = x, \; x = 0, \; y = \sqrt{1 - x^2}$ quanh trục Oy.
5. $x^2 + y^2 = 4x - 3$ quanh trục Oy.
6. $y^2 + x = 9$ và $x = 0$ quanh trục Oy.

Chương 4. LÝ THUYẾT CHUỖI

ThS. Nguyễn Thị Huyên

BM Toán Giải tích - Trường ĐHGTVT

2025

Mục lục

Định nghĩa 1.1.

Tổng vô hạn của các số thực $u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_n + \cdots$ được gọi là chuỗi số và ký hiệu là $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n$.

Số hạng tổng quát của chuỗi số: u_n

Tổng riêng của chuỗi số: $S_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n$.

1. Nếu tồn tại $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = S$ (hữu hạn) thì chuỗi số được gọi là hội tụ và có tổng bằng S, khi đó ta viết $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n = S$.
2. Nếu không tồn tại $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$ hoặc $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = \infty$ thì chuỗi số được gọi là phân kỳ.

Ví dụ 1.1.

Tính tổng của chuỗi số: $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2+n}$

Số hạng tổng quát của chuỗi $u_n = \dfrac{1}{n^2+n} = \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n+1}$

Tổng riêng của chuỗi:

$$\begin{aligned} S_n &= u_1 + u_2 + \cdots + u_n \\ &= \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) \\ &= \frac{1}{1} - \frac{1}{n+1}. \end{aligned}$$

$$\Longrightarrow \lim_{n\to+\infty} S_n = 1.$$

Vậy chuỗi số đã cho hội tụ và $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2+n} = 1.$

Ví dụ 1.2.

Xét sự hội tụ của chuỗi số:

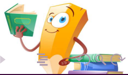
Số hạng tổng quát của chuỗi $u_n = \sqrt{n+2} - 2\sqrt{n+1} + \sqrt{n}$

$$\begin{array}{lllll}
u_1 & = & \sqrt{3} & -2\sqrt{2} & +\sqrt{1} \\
u_2 & = & \sqrt{4} & -2\sqrt{3} & +\sqrt{2} \\
u_3 & = & \sqrt{5} & -2\sqrt{4} & +\sqrt{3} \\
u_4 & = & \sqrt{6} & -2\sqrt{5} & +\sqrt{4} \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
u_{n-2} & = & \sqrt{n} & -2\sqrt{n-1} & +\sqrt{n-2} \\
u_{n-1} & = & \sqrt{n+1} & -2\sqrt{n} & +\sqrt{n-1} \\
u_n & = & \sqrt{n+2} & -2\sqrt{n+1} & +\sqrt{n} \\
\hline
\end{array}$$

Tổng riêng: $S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n = 1 - \sqrt{2} + \sqrt{n+2} - \sqrt{n+1}$

$$\Longrightarrow \lim_{n\to+\infty} S_n = 1 - \sqrt{2} + \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{n+2} + \sqrt{n+1}} = 1 - \sqrt{2}.$$

Vậy chuỗi số đã cho hội tụ và $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \left(\sqrt{n+2} - 2\sqrt{n+1} + \sqrt{n}\right) = 1 - \sqrt{2}.$



Điều kiện cần

Định lý 1.1.

Nếu chuỗi số $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ hội tụ thì $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$.

Chú ý:

1. Chiều ngược lại của Định lý không đúng, do đó không dùng Điều kiện cần để chứng minh chuỗi số hội tụ.
2. Dùng điều kiện cần để chứng minh chuỗi số phân kỳ. Cụ thể, nếu ta chỉ ra một trong các điều kiện sau xảy ra:
   - không tồn tại $\lim_{n\to+\infty} u_n$
   - $\lim_{n\to+\infty} u_n \neq 0$
   - $\lim_{n\to+\infty} |u_n| \neq 0$

   thì kết luận là chuỗi $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ phân kỳ.

Ví dụ 1.3.

Dùng điều kiện cần, chứng minh các chuỗi số sau phân kỳ:

1. $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{2n+3}{3n+7}\right)^4$.
2. $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\left(\frac{n}{n+1}\right)^n$.

1. $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{2n+3}{3n+7}\right)^4$. Số hạng tổng quát $u_n=\left(\dfrac{2n+3}{3n+7}\right)^4$

   $$\Longrightarrow \lim_{n\to+\infty} u_n=\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{2n+3}{3n+7}\right)^4=\left(\frac{2}{3}\right)^4\neq 0.$$

   Vậy chuỗi đã cho phân kỳ theo điều kiện cần.

2. $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\left(\frac{n}{n+1}\right)^n$. Số hạng tổng quát $u_n=(-1)^n\left(\dfrac{n}{n+1}\right)^n$

   $$\Longrightarrow \lim_{n\to+\infty}|u_n|=\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n}=\frac{1}{e}\neq 0.$$

   Vậy chuỗi đã cho phân kỳ theo điều kiện cần.

Chương 4. Lý thuyết chuỗi

Tiêu chuẩn so sánh cho chuỗi số dương

Định lý 2.1.

Cho 2 chuỗi số dương $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ và $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ $(a_n, b_n > 0, \forall n)$

1. **Tiêu chuẩn so sánh 1**: Nếu $a_n \leq b_n, \forall n \geq N_0$ nào đó thì :
   - Từ $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ hội tụ suy ra $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ cũng hội tụ.
   - Từ $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ phân kỳ suy ra $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ cũng phân kỳ.
2. **Tiêu chuẩn so sánh 2 (tiêu chuẩn tương đương):** Nếu $\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n} = k$ $(0 < k < +\infty)$, hay $a_n \sim kb_n$ (VCB) khi $n \to +\infty$ thì 2 chuỗi số $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ và $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ hoặc cùng hội tụ hoặc cùng phân kỳ.

Kết quả cần nhớ

Chú ý 1.

Khi dùng tiêu chuẩn so sánh ta thường đưa về so sánh với các chuỗi số sau:

1. Chuỗi số $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha} (\alpha \in \mathbb{R}) \begin{cases} \text{hội tụ} & \text{nếu } \alpha > 1, \\ \text{phân kỳ} & \text{nếu } \alpha \leq 1. \end{cases}$
2. Chuỗi số $\sum_{n=1}^{+\infty} q^n (q \in \mathbb{R}) \begin{cases} \text{hội tụ} & \text{nếu } |q| < 1, \\ \text{phân kỳ} & \text{nếu } |q| \geq 1. \end{cases}$ Ngoài ra,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} q^n = \frac{1}{1-q} \text{ nếu } |q| < 1.$$

$$\sum_{n=k}^{+\infty} q^n = \frac{q^k}{1-q} \text{ nếu } |q| < 1, \text{ với } k \geq 1.$$

Ví dụ 2.1.

1. $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\ln n}{n^3+n^2+2}$.
2. $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{n\ln n}{n^2-1}$.

1. Với $n \geq 1$, ta có $\ln n \leq n$, nên $0 < a_n = \dfrac{\ln n}{n^3+n^2+2} \leq \dfrac{n}{n^3+n^2+2} < \dfrac{n}{n^3} = \dfrac{1}{n^2}$.

   Mà $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$ hội tụ nên $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\ln n}{n^3+n^2+2}$ cũng hội tụ.

2. Với $n \geq 2$, ta có $\ln n \geq \ln 2$, nên $a_n = \dfrac{n\ln n}{n^2-1} \geq \dfrac{n\ln 2}{n^2-1} > \dfrac{n\ln 2}{n^2} = \dfrac{\ln 2}{n} > 0$.

   Mà $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\ln 2}{n}$ phân kỳ nên $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{n\ln n}{n^2-1}$ cũng phân kỳ.

Ví dụ 2.2.

Xét sự hội tụ của chuỗi số: $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\tan\frac{1}{3n}-\sin\frac{1}{3n}\right)$.

- Đây là chuỗi số dương với số hạng tổng quát $a_n=\tan\dfrac{1}{3n}-\sin\dfrac{1}{3n}>0$.
- Ta có $\tan x-\sin x=\tan x(1-\cos x)\sim\dfrac{x^3}{2}$ khi $x\to 0$, nên $\tan\dfrac{1}{3n}-\sin\dfrac{1}{3n}\sim\dfrac{1}{54n^3}$ khi $n\to+\infty$.
- Mà $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{54n^3}$ hội tụ nên $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\tan\frac{1}{3n}-\sin\frac{1}{3n}\right)$ cũng hội tụ.

Ví dụ 2.3.

Xét sự hội tụ của chuỗi số: $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(2n+1)\left(e^{\frac{1}{n\sqrt{n}}}-1\right)$.

- Khi $n \to +\infty$ ta có $e^{\frac{1}{n\sqrt{n}}}-1 \sim \dfrac{1}{n\sqrt{n}}$ và $(2n+1) \sim 2n$.

  $\Longrightarrow 0 < (2n+1)\left(e^{\frac{1}{n\sqrt{n}}}-1\right) \sim \dfrac{2}{\sqrt{n}}$ khi $n \to +\infty$.

- Mà chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{2}{\sqrt{n}}$ phân kỳ nên chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(2n+1)\left(e^{\frac{1}{n\sqrt{n}}}-1\right)$ cũng phân kỳ.

Ví dụ 2.4.

Xét sự hội tụ của chuỗi số: $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n\sqrt[n]{n}}$

- Đặt $A = \displaystyle\lim_{x\to+\infty} x^{1/x} (\infty^0)$. Ta có $\ln A = \displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim_{x\to+\infty} \frac{1/x}{1} = 0$. Vậy $A = 1$, hay $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} x^{1/x} = 1$.
- Khi $n \to +\infty$, ta có $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n} = \lim_{n\to+\infty} n^{1/n} = 1$ nên $\displaystyle\frac{1}{n\sqrt[n]{n}} \sim \frac{1}{n}$.
- Mà chuỗi $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$ phân kỳ nên chuỗi $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n\sqrt[n]{n}}$ cũng phân kỳ.

Tiêu chuẩn D'Alembert cho chuỗi số dương

Định lý 2.2.

Cho chuỗi số dương $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ thỏa mãn $\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = D (0 \leq D \leq +\infty)$. Khi đó:

- Nếu $D < 1$ thì chuỗi hội tụ,
- Nếu $D > 1$ thì chuỗi phân kỳ,
- Nếu $D = 1$ thì chưa kết luận được.

Ta thường sử dụng tiêu chuẩn D'Alembert trong trường hợp

$$a_{n+1} = A.a_n$$

chẳng hạn như biểu thức a_n có chứa $n!$ vì $(n+1)! = (n+1).n!$ hay A^n vì $A^{n+1} = A.A^n$

Ví dụ 2.5.

Xét sự hội tụ của chuỗi số $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{3^n.n!}{n^n}$.

- Đây là chuỗi số dương với số hạng tổng quát $a_n = \dfrac{3^n.n!}{n^n} > 0$.
- $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} = \dfrac{3(n+1)n^n}{(n+1)^{n+1}} = 3\left(\dfrac{n}{n+1}\right)^n$
- $\Longrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{3}{\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n} = \dfrac{3}{e} > 1.$
- Theo tiêu chuẩn D'Alembert, chuỗi đã cho phân kỳ.

Tiêu chuẩn Cauchy cho chuỗi số dương

Định lý 2.3.

Cho chuỗi số dương $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ thỏa mãn $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n} = C(0 \leq C \leq +\infty)$. Khi đó:

- Nếu $C < 1$ thì chuỗi hội tụ,
- Nếu $C > 1$ thì chuỗi phân kỳ,
- Nếu $C = 1$ thì chưa kết luận được.

Ví dụ 2.6.

Xét sự hội tụ của chuỗi số $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\left(\dfrac{n-1}{n+1}\right)^{n(n+2)}$.

- Số hạng tổng quát $a_n = \left(\dfrac{n-1}{n+1}\right)^{n(n+2)} > 0, \forall n \geq 1.$
- $\Longrightarrow \sqrt[n]{a_n} = \left(\dfrac{n-1}{n+1}\right)^{n+2}$
- $\Longrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n-1}{n+1}\right)^{n+2} = \lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\dfrac{2}{n+1}\right)^{\frac{n+1}{-2}\cdot\frac{-2(n+2)}{n+1}} = e^{-2} < 1$
- Theo tiêu chuẩn Cauchy, chuỗi đã cho hội tụ.

Định lý 2.4.

Giả sử

- $a_n = f(n), \forall n \geq 1,$
- $f(x)$ liên tục, dương, đơn điệu giảm trên $[1, +\infty)$.

Khi đó chuỗi số $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ và tích phân suy rộng $\int\limits_1^{+\infty} f(x)dx$ hoặc cùng hội tụ hoặc cùng phân kỳ.

Từ tiêu chuẩn tích phân, ta có chuỗi số $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ và tích phân suy rộng $\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha} (\alpha \in \mathbb{R}) \begin{cases} \text{hội tụ} \\ \text{phân kỳ} \end{cases}$

Ví dụ 2.7.

Xét sự hội tụ của chuỗi: $\sum\limits_{n=2}^{+\infty} \dfrac{1}{n.\ln^k n}$ với $k \in \mathbb{R}$.

Xét hàm $f(x) = \dfrac{1}{x.\ln^k x}, \forall x \geq 2$. Hàm $f(x)$ thỏa mãn hai điều kiện của tiêu chuẩn tích phân:

- $a_n = f(n), \forall n \geq x_0$,
- $f(x)$ liên tục, dương, đơn điệu giảm trên $[x_0, +\infty)$.

Mà tích phân $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x.\ln^k x} = \int_2^{+\infty} \frac{d(\ln x)}{(\ln x)^k}$

- Nếu $k > 1$ thì tích phân hội tụ và chuỗi hội tụ.
- Nếu $k \leq 1$ thì tích phân phân kỳ và chuỗi phân kỳ.

Ví dụ 2.8.

Xét sự hội tụ của chuỗi: $\sum\limits_{n=2}^{+\infty} \frac{n}{(n^2-1).\ln^2 n}$.

Khi $n \to +\infty$, ta có $n^2 - 1 \sim n^2$ và $\frac{n}{(n^2-1).\ln^2 n} \sim \frac{1}{n.\ln^2 n}$.

Xét hàm $f(x) = \frac{1}{x.\ln^2 x}, \forall x \geq 2$. Ta có

- $a_n = f(n), \forall n \geq 2$,
- $f(x)$ liên tục, dương, đơn điệu giảm trên $[2, +\infty)$.

Mà tích phân $\int\limits_2^{+\infty} \frac{dx}{x.\ln^2 x} = \int\limits_2^{+\infty} \frac{d(\ln x)}{(\ln x)^2}$ hội tụ nên chuỗi $\sum\limits_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n.\ln^2 n}$ hội tụ và chuỗi $\sum\limits_{n=2}^{+\infty} \frac{n}{(n^2-1).\ln^2 n}$ cũng hội tụ.

Bài tập

Xét sự hội tụ của chuỗi số

1. $$\sum_{n=1}^{+\infty}(\sqrt{n+2} - 2\sqrt{n+1} + \sqrt{n})$$
2. $$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\ln n}{n^3+n^2+2}$$
3. $$\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{n\ln n}{n^2-1}$$
4. $$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n^n}{(n+1)^n.2^{n-1}}$$
5. $$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n.\sqrt[n]{n}}$$
6. $$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{3.5.7...(2n+1)}{2.5.8...(3n-1)}$$
7. $$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{3^n.n!}{n^n}$$
8. $$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{2^n}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n^2}$$
9. $$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\ln(n^5+n)}{\sqrt{n^5+n}}$$
10. $$\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\tan\frac{1}{3n} - \sin\frac{1}{3n}\right)$$

Xét sự hội tụ của chuỗi số

1. $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(n+1)^{n^2}}{n^{n^2} 3^n}$
2. $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\ln n}{\sqrt{2n^5 + 3n}}$
3. $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} \ln\left(1 + \frac{1}{n^p}\right)$
4. $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^p} \sin \frac{\pi}{n}$
5. $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n+1)\ln(n^2+n+1)}$
6. $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n.\ln^k n}$
7. $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} (-1)^n \frac{n}{n^2-1}$
8. $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n . \left(\frac{3n+2}{2n+7}\right)^n$
9. $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n . \frac{3^n}{n^3}$
10. $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n . \left(\frac{n}{n+1}\right)^n$

Định lý 3.1.

Cho chuỗi đan dấu $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n.a_n$ hoặc $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}.a_n$ với $a_n > 0, \forall n$ thỏa mãn:

- đơn điệu giảm: $a_{n+1} < a_n, \forall n \geq 1$,
- dần đến 0: $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

Khi đó chuỗi đan dấu là hội tụ

Ví dụ 3.1.

Chuỗi đan dấu $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\frac{1}{n}$ có $a_n = \frac{1}{n}$ thỏa mãn các điều kiện của tiêu chuẩn Leibnitz nên nó hội tụ.

Chương 4. Lý thuyết chuỗi

Định lý 4.1.

Nếu $\sum_{n=1}^{+\infty} |u_n|$ hội tụ thì $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ cũng hội tụ.

Chiều ngược lại của Định lý không đúng.

Định nghĩa 4.1.

- Chuỗi $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ được gọi là hội tụ tuyệt đối nếu chuỗi $\sum_{n=1}^{+\infty} |u_n|$ hội tụ
- Chuỗi $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ được gọi là hội tụ tương đối (bán hội tụ) nếu chuỗi $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ hội tụ còn chuỗi $\sum_{n=1}^{+\infty} |u_n|$ phân kỳ.

Ví dụ 4.1.

Xét sự hội tụ tuyệt đối, bán hội tụ của chuỗi: $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{3n+1}}$.

- Chuỗi $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{3n+1}}$ là chuỗi đan dấu với $a_n = \dfrac{1}{\sqrt{3n+1}}$ đơn điệu giảm và $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$ nên hội tụ theo tiêu chuẩn Leibnitz.
- Xét chuỗi $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \left|\frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{3n+1}}\right| = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{3n+1}}$.

  Khi $n \to +\infty$, ta có: $3n+1 \sim 3n$ và $\dfrac{1}{\sqrt{3n+1}} \sim \frac{1}{\sqrt{3n}}$. Chuỗi $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{3n}}$ phân kỳ nên $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{3n+1}}$ cũng phân kỳ.
- Như vậy, chuỗi $\sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{3n+1}}$ bán hội tụ.

Ví dụ 4.2.

Xét sự hội tụ tuyệt đối, bán hội tụ của chuỗi: $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{\ln(n+1)}$.

- Chuỗi $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{\ln(n+1)}$ là chuỗi đan dấu với $a_n = \frac{1}{\ln(n+1)}$ đơn điệu giảm và $\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$ nên hội tụ theo tiêu chuẩn Leibnitz.
- Xét chuỗi $\sum_{n=1}^{+\infty} \left|\frac{(-1)^n}{\ln(n+1)}\right| = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\ln(n+1)}$.

  Khi $n \geq 1$, ta có: $\ln(n+1) < n$ và $\frac{1}{\ln(n+1)} > \frac{1}{n} > 0$.

  Chuỗi $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$ phân kỳ nên $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\ln(n+1)}$ cũng phân kỳ.
- Như vậy, chuỗi $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{\ln(n+1)}$ bán hội tụ.

Chú ý 2.

Ta có thể dùng tiêu chuẩn D'Alembert hoặc tiêu chuẩn Cauchy cho chuỗi có dấu bất kỳ $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n$. Tính $D = \lim\limits_{n\to+\infty} \left|\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right|$ hoặc $C = \lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|u_n|}$

- Nếu $D < 1$ hoặc $C < 1$ thì chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n$ hội tụ tuyệt đối.
- Nếu $D > 1$ hoặc $C > 1$ thì chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n$ phân kỳ
- Nếu $D = 1$ hoặc $C = 1$ thì ta chưa có kết luận gì.

Ví dụ 4.3.

Xét sự hội tụ tuyệt đối của chuỗi số:

1. $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\dfrac{2^n}{n!}$.
2. $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\left(\dfrac{3n+1}{2n+7}\right)^n$.

1. $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\dfrac{2^n}{n!}$.

   Ta có $\lim\limits_{n\to+\infty}\left|\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{2}{n+1} = 0 < 1$. Vậy chuỗi đã cho hội tụ tuyệt đối theo tiêu chuẩn D'Alembert.
2. $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\left(\dfrac{3n+1}{2n+7}\right)^n$.

   Ta có $\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt[n]{|u_n|} = \lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{3n+1}{2n+7} = \dfrac{3}{2} > 1$. Vậy chuỗi đã cho phân kỳ theo tiêu chuẩn Cauchy.

Bài tập

Xét sự hội tụ tuyệt đối, hội tụ tương đối của chuỗi số:

1. $$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos(n\pi)}{(n+1)(n+2)}$$
2. $$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} . \frac{2^n}{n!}$$
3. $$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n \ln(n^2+1)}$$
4. $$\sum_{n=1}^{+\infty} \sin \frac{\pi n^2}{n+1}$$
5. $$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \left(\frac{1+n}{n^2}\right)$$
6. $$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{\ln(n+1)}$$
7. $$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n (\sqrt{n+1} - \sqrt{n-1})$$

Chuỗi hàm

Tổng vô hạn của các hàm số biến x: $U_1(x)+U_2(x)+\cdots+U_n(x)+\cdots$ được gọi là một chuỗi hàm và ký hiệu là $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} U_n(x)$. Số hạng tổng quát của chuỗi hàm là $U_n(x)$ với $x \in D$ (tập xác định chung của các hàm $\forall n$).

Cho $x_0 \in D$ cố định, khi đó chuỗi hàm trở thành chuỗi số $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} U_n(x_0)$

- Nếu $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} U_n(x_0)$ hội tụ thì x_0 là điểm hội tụ của chuỗi hàm.
- Nếu $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} U_n(x_0)$ phân kỳ thì x_0 là điểm phân kỳ của chuỗi hàm.

Tập hợp tất cả các điểm hội tụ của chuỗi hàm được gọi là miền hội tụ của chuỗi hàm.

Tìm mền hội tụ của chuỗi hàm

Cho chuỗi hàm $\sum_{n=1}^{+\infty} U_n(x)$. Để tìm miền hội tụ của nó, ta làm như sau:

- Tìm tập xác định D chung của $U_n(x)$ (tìm điều kiện của x để $U_n(x)$ tồn tại $\forall n$).
- Biện luận theo $x \in D$ sự hội tụ của chuỗi $\sum_{n=1}^{+\infty} U_n(x)$ (coi x là hằng số, xét sự hội tụ của chuỗi).
- Kết luận miền hội tụ = tập hợp tất cả các giá trị của x mà tại đó chuỗi hội tụ.

Tìm miền hội tụ của chuỗi hàm

Chú ý: Ta thường dùng tiêu chuẩn D'Alembert hoặc tiêu chuẩn Cauchy để xét sự hội tụ, cụ thể như sau:

- Tính $\lim\limits_{n\to+\infty}\left|\dfrac{U_{n+1}(x)}{U_n(x)}\right| = D(x)$ hoặc $\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt[n]{|U_n(x)|} = C(x)$.
- Nếu $D(x) < 1$ hoặc $C(x) < 1$, giải ra nghiệm $x \in E \subset D$, thì chuỗi hội tụ.
- Nếu $D(x) > 1$ hoặc $C(x) > 1$ thì chuỗi phân kỳ.
- Nếu $D(x) = 1$ hoặc $C(x) = 1$, tại các giá trị $x = a, x = b, \cdots$, ta thay trực tiếp vào chuỗi hàm ban đầu và dùng các tiêu chuẩn khác để xét sự hội tụ.

Kết luận miền hội tụ là tập hợp E và thêm tại các nút $x = a, x = b, \cdots$ nếu tại nút đó chuỗi đã cho hội tụ.

Ví dụ 5.1.

Tìm miền hội tụ của chuỗi hàm: $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\frac{(2x+3)^n}{2n+3}$

.

- $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{U_{n+1}(x)}{U_n(x)}\right| = \lim_{n\to+\infty}\left|\frac{2n+3}{2n+5}(2x+3)\right| = |2x+3|$
- Nếu $|2x+3| < 1 \iff -2 < x < -1$ thì chuỗi hội tụ.
- Nếu $|2x+3| > 1 \iff \left[\begin{array}{l} x < -2 \\ x > -1 \end{array}\right.$ thì chuỗi phân kỳ.
- Tại $x = -2$ chuỗi trở thành $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{2n+3}$ là chuỗi phân kỳ.
- Tại $x = -1$ chuỗi trở thành $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{2n+3}$ là chuỗi đan dấu hội tụ theo tiêu chuẩn Leibnitz.

Vậy miền hội tụ của chuỗi hàm là $x \in (-2;-1]$

Ví dụ 5.2.

Tìm miền hội tụ của chuỗi hàm: $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{x^{2n+1}}{9^n\sqrt{2n+1}}$.

- $\lim\limits_{n\to+\infty}\left|\dfrac{U_{n+1}(x)}{U_n(x)}\right| = \lim\limits_{n\to+\infty}\left|\sqrt{\dfrac{2n+1}{2n+3}}.\dfrac{x^2}{9}\right| = \dfrac{x^2}{9}$
- Nếu $\dfrac{x^2}{9} < 1 \iff -3 < x < 3$ thì chuỗi hội tụ.
- Nếu $\dfrac{x^2}{9} > 1 \iff \left[\begin{array}{l} x < -3 \\ x > 3 \end{array}\right.$ thì chuỗi phân kỳ.
- Tại $x = -3$ chuỗi trở thành $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{-3}{\sqrt{2n+1}}$ là chuỗi phân kỳ.
- Tại $x = 3$ chuỗi trở thành $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{3}{\sqrt{2n+1}}$ là chuỗi phân kỳ.

Vậy miền hội tụ của chuỗi hàm là $x \in (-3;3)$

Ví dụ 5.3.

Tìm miền hội tụ của chuỗi hàm: $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n (x+2)^n}{\sqrt{n+1}}$.

- $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \left|\frac{U_{n+1}(x)}{U_n(x)}\right| = \lim_{n\to+\infty} \left|\frac{\sqrt{n+1}(x+2)}{\sqrt{n+2}}\right| = |x+2|$
- Nếu $|x+2| < 1 \iff -3 < x < -1$ thì chuỗi hội tụ.
- Nếu $|x+2| > 1 \iff \left[\begin{array}{l} x < -3 \\ x > -1 \end{array}\right.$ thì chuỗi phân kỳ.
- Tại $x = -3$ chuỗi trở thành $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{n+1}}$ là phân kỳ.
- Tại $x = -1$ chuỗi trở thành $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}$ là chuỗi đan dấu, hội tụ theo tiêu chuẩn Leibnitz.

Vậy miền hội tụ của chuỗi hàm là $x \in (-3; -1]$.

Ví dụ 5.4.

Tìm miền hội tụ của chuỗi hàm: $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(x+1)^n}{2^n(2n^2+1)}$.

- $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{U_{n+1}(x)}{U_n(x)}\right| = \lim_{n\to+\infty}\left|\frac{(2n^2+1)(x+1)}{2(2n^2+4n+3)}\right| = \frac{|x+1|}{2}$
- Nếu $\dfrac{|x+1|}{2} < 1 \iff -3 < x < 1$ thì chuỗi hội tụ.
- Nếu $\dfrac{|x+1|}{2} > 1 \iff \left[\begin{array}{l} x < -3 \\ x > 1 \end{array}\right.$ thì chuỗi phân kỳ.
- Tại $x = -3$ chuỗi trở thành $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n^2+1}$ là chuỗi đan dấu hội tụ theo tiêu chuẩn Leibnitz.
- Tại $x = 1$ chuỗi trở thành $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2n^2+1}$ là chuỗi hội tụ.

Vậy miền hội tụ của chuỗi hàm là $x \in [-3; 1]$.

Chuỗi lũy thừa

Chuỗi lũy thừa là chuỗi hàm có dạng sau

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n(x-x_0)^n = a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + \cdots + a_n\,(x-x_0)^n + \cdots$$

Để tìm miền hội tụ của chuỗi lũy thừa, ta có thể áp dụng tiêu chuẩn Đa lăm be, hoặc Cô si.

Các tính chất của chuỗi lũy thừa:

1. Tổng của một chuỗi lũy thừa (nếu có) là một hàm liên tục trong miền hội tụ của nó.
2. Có thể lấy đạo hàm từng số hạng của chuỗi lũy thừa tại mọi điểm trong khoảng hội tụ của nó.
3. Có thể lấy tích phân từng số hạng của chuỗi lũy thừa trên $[a, b]$ bất kỳ chứa trong khoảng hội tụ của nó.

Chuỗi lũy thừa

Để tính tổng của một chuỗi lũy thừa, ta thường áp dụng các tính chất lấy đạo hàm hoặc lấy tích phân từng số hạng rồi biến đổi đưa về chuỗi quen thuộc đã biết:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} q^n = \frac{1}{1-q} \text{ nếu } |q| < 1.$$

$$\sum_{n=k}^{+\infty} q^n = \frac{q^k}{1-q} \text{ nếu } |q| < 1, \text{ với } k \geq 1.$$

Ví dụ 6.1.

Tìm miền hội tụ và tính tổng của chuỗi lũy thừa: $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} nx^n$.

- Áp dụng tiêu chuẩn Đa lăm be và xét tại các điểm nút, ta có miền hội tụ là $(-1, 1)$.
- Đặt $S(x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} nx^n = x \sum\limits_{n=1}^{+\infty} nx^{n-1}$ với $x \in (-1, 1)$.
- Vì $nx^{n-1} = (x^n)'$ nên $S(x) = x \sum\limits_{n=1}^{+\infty} (x^n)' = x \left(\sum\limits_{n=1}^{+\infty} x^n \right)'$.
- Lại có $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} q^n = \dfrac{q}{1-q}$ nếu $|q| < 1$, do đó $S(x) = x \left(\dfrac{x}{1-x} \right)' = \dfrac{x}{(1-x)^2}$, với $\forall x \in (-1, 1)$.

Ví dụ 6.2.

Tìm miền hội tụ và tính tổng của chuỗi lũy thừa: $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n}$.

- Áp dụng tiêu chuẩn Đa lăm be và xét tại các điểm nút, ta có miền hội tụ là $[-1, 1)$.
- Đặt $S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n}$ với $x \in (-1, 1)$.
- $S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\int_0^x x^{n-1} dx \right) = \int_0^x \left(\sum_{n=1}^{+\infty} x^{n-1} \right) dx$.
- Lại có $\sum_{n=1}^{+\infty} x^{n-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$ nếu $|x| < 1$, do đó $S(x) = \int_0^x \frac{dx}{1-x} = -\ln(1-x)$, với $\forall x \in (-1, 1)$.

Bài tập

Tìm miền hội tụ của chuỗi hàm

1. $$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-4)^n \arcsin^n x}{\pi^n(n+1)}$$
2. $$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n2^n}\left(\frac{x}{x+1}\right)^n$$
3. $$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-\ln x)^n}{2n+1}$$
4. $$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n n^2}{3^n} e^{nx}$$
5. $$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(\ln x)^n}$$
6. $$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2^n \sin^n x}{n^2}$$
7. $$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{n+1}\left(\frac{x}{2x+1}\right)^n$$
8. $$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2^n \sin^n x}{(n+1)^2}$$
9. $$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2^n (\sin x)^n}{n}$$
10. $$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2 \ln^n x}$$

11 $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^n}\left(\frac{2x+1}{x+2}\right)^n$

22 $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^n$

33 $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n(2x-3)^n}$

44 $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(x-1)^{2n}}{n4^n}$

55 $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{n(2n-1)}$

66 $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} x^n \tan\frac{1}{n}$

77 $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-2)^n}{n\pi^n} x^n$

88 $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\ln n}{n^2+1} x^n$

99 $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n\left(\frac{1+n}{n^2}\right) x^n$

01 $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(x+1)^n}{2^n(2n+1)}$

11 $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^n}{n(2n+1)}$

21 $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n (x+2)^n}{\sqrt{n^2+1}}$