

BÀI TẬP GIẢI TÍCH 2

Năm học 2024 - 2025

CHƯƠNG 1: HÀM NHIỀU BIẾN

PHẦN TỰ LUẬN

Bài 1. Tính đạo hàm riêng

- 1) Cho $z = \sqrt[3]{xy}$, tính $z'_x(0, 0), z'_y(0, 0)$.
- 2) $z = \ln \frac{1}{x + \sqrt{x^2 + y^2}}$
- 3) $z = \ln \tan \frac{x}{y}$
- 4) $z = \arctan \frac{x + y}{x - y}$
- 5) $f(x, y) = e^{2x+y^3} + \sqrt{x^3 + y^2} + \sin(4x^2 + 5y)$.
- 6) $f(x, y) = \arctan \frac{x + y}{1 - xy}$.
- 7) $f(x, y, z) = \arctan \frac{y}{xz}$
- 8) $f(x, y, z) = x^2 + 3y^2z + xz^3 + e^{xyz}$
- 9) $u = x^{y^2z}$
- 10) Cho $z = \ln(u^2 + v^2)$, $u = xy$, $v = e^{x+y}$. Tính $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$.
- 11) Cho $z = \ln(3x + 2y - 1)$, $x = e^t$, $y = \sin t$. Tính $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, \frac{dz}{dt}$.
- 12) Cho $u = \sin x + f(\sin y - \sin x)$, f là hàm khả vi. Chứng minh rằng:

$$\frac{\partial u}{\partial y} \cos x + \frac{\partial u}{\partial x} \cos y = \cos x \cos y.$$
- 13) Cho $z = f(xy + y^2)$, f là hàm khả vi. Rút gọn biểu thức $A = (x + 2y) \frac{\partial z}{\partial x} - y \frac{\partial z}{\partial y}$.
- 14) Cho $u = f\left(\frac{y}{x}, \frac{x}{z}\right)$, f là hàm khả vi. Rút gọn biểu thức $B = x \frac{\partial u}{\partial x} + y \frac{\partial u}{\partial y} + z \frac{\partial u}{\partial z}$.

Bài 2. Đạo hàm của hàm ẩn

- 1) Tính $y'(x)$ biết $y = y(x)$ hàm ẩn xác định hệ thức: $1 + xy - \ln(e^{xy} + e^{-xy}) = 0$.
- 2) Tính $y'(x), y''(x)$ biết $y = y(x)$ là hàm ẩn xác định bởi phương trình

$$\ln \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \arctan \frac{y}{x}$$

- 3) Tính $y'(x)$ của hàm ẩn xác định bởi phương trình $xe^y + ye^x = 1$ và từ đó tính $y'(0)$.
- 4) Tính z'_x, z'_y và dz biết $z = z(x, y)$ là hàm ẩn xác định bởi
- (a) $xy^2z^3 + x^3y^2z = x + y + z$. (e) $x^3 + y^3 + z^3 = 3xyz$
- (b) $\arctan z + z^2 = e^{xy}$ (f) $2x + 3y + z = e^{xyz}$.
- (c) $z - ye^{x/z} = 0$
- (d) $\frac{x}{z} = \ln \frac{z}{y} + 1$ (g) $xyz = \cos(x + y + z)$
- 5) Tính $y'(x), z'(x)$ biết $y = y(x), z = z(x)$ xác định bởi $\begin{cases} x + 2y + 3z = 1 \\ x^2 + y^2 + z^3 = 4 \end{cases}$
- 6) Tính u'_x, u'_y biết $u = x^2 + y^2 + xyz$ và $z = z(x, y)$ xác định bởi $ze^z = ye^x + xe^y$.

Bài 3. Đạo hàm và vi phân cấp cao

- 1) Cho hàm số $u(x, y, z) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$. Hãy rút gọn biểu thức

$$A = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}.$$

- 2) Cho $u = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$. Chứng minh rằng: $u''_{x^2} + u''_{y^2} + u''_{z^2} = \frac{2}{u}$.

- 3) Tính $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \left(\frac{1}{2}, 1 \right)$ biết $u(x, y) = x + (y - 1) \arcsin \left(\sqrt{\frac{x}{y}} \right)$

- 4) Tính z''_{xy} biết hàm ẩn $z = z(x, y)$ xác định bởi $3x + 2y + z = e^{-x-y-z}$.

- 5) Tính các đạo hàm riêng cấp 1, cấp 2 của hàm số $f(x, y) = x \cos(3x + y^2) + e^{2x+3y}$.

- 6) Tính $d^2 f(1, 1)$, biết: $f(x, y) = x^2 + xy + y^2 - 4 \ln x - 2 \ln y$.

- 7) Tính $d^2 f(0, 1)$, biết: $f(x, y) = \arctan \frac{x}{y}$.

- 8) Tính các đạo hàm riêng cấp 1, cấp 2 và vi phân toàn phần của hàm số $f(x, y) = \ln \left(\sqrt{x^2 + y^2} \right) + 3 \arctan \frac{x}{y}$ tại điểm $(1, 2)$.

- 9) Tìm $d^2 z$ biết:

(a) $z = x^2 \ln(x + y)$ (b) $z = \arctan \frac{y}{x}$

Bài 4. Cực trị của hàm nhiều biến

- 1) Tìm cực trị các hàm sau:

BÀI TẬP GIẢI TÍCH 2

- (a) $f(x, y) = x^2 + xy + y^2 - 2x - 3y$
- (b) $f(x, y) = x^3 + y^3 - 15xy$.
- (c) $f(x, y) = xy + 1000\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right)$
- (d) $f(x, y) = 2x^4 + y^4 - x^2 - 2y^2$
- (e) $f(x, y) = xy + \frac{8}{x} + \frac{1}{y}$
- (f) $f(x, y) = y\sqrt{x} - 2y^2 - x + 7y + 5$.
- (g) $f(x, y) = x^2 + 4y^2 - 2\ln(xy)$.
- (h) $f(x, y) = x^3 + 3xy^2 - 15x - 12y$.
- (i) $f(x, y) = (x - y)(1 - xy)$.

2) Tìm cực trị có điều kiện:

- (a) $f(x, y) = x + 2y$ với điều kiện $x^2 + y^2 = 5$
- (b) $f(x, y) = x^2 + y^2$ với điều kiện $\frac{x}{2} + \frac{y}{3} = 1$
- (c) $f(x, y) = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$ với điều kiện $\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} = 1$
- (d) $f(x, y) = xy$ với điều kiện $\frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{2} = 1$

3) Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất

- (a) $f(x, y) = x^2 + 3y^2 + x - y$, trên miền đóng D giới hạn bởi các đường $x = 1, y = 1, x + y = 1$.
- (b) $f(x, y) = xy$ trên miền $D = \left\{ \frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{2} \leq 1 \right\}$
- (c) $z = 1 + xy - x - y$, trên miền đóng D giới hạn bởi $y = x^2$ và $y = 1$

PHẦN TRẮC NGHIỆM

Câu 1. Tìm vi phân toàn phần của hàm số $z = x^2 + 5^y$.

- (A) $dz = 2xdx + 5^y \ln 5dy$.
- (B) $dz = 2xdx + 5^y \ln ydy$.
- (C) $dz = 2xdx + 5^{y-1}dy$.
- (D) $dz = 2xdx + 5^{y-1} \ln 5dy$.

Câu 2. Tìm vi phân toàn phần của hàm số $z = \ln \sqrt{x - y}$.

- (A) $dz = \frac{dy - dx}{2(x - y)}$.
- (B) $dz = \frac{dx - dy}{2(x - y)}$.
- (C) $dz = \frac{dx - dy}{x - y}$.
- (D) $dz = \frac{dy - dx}{x - y}$.

Câu 3. Tìm vi phân toàn phần của hàm số $z = \arctan(x - y)$.

- (A) $dz = \frac{dx + dy}{1 + (x - y)^2}$.
- (B) $dz = \frac{dx - dy}{1 + (x - y)^2}$.
- (C) $dz = \frac{dy - dx}{1 + (x - y)^2}$.
- (D) $dz = \frac{-dx - dy}{1 + (x - y)^2}$.

Câu 4. Tìm vi phân toàn phần của hàm số $z = x^2 + 2xy + \sin(x^3y^5)$.

- (A) $dz = [4x + 3x^2 \cos(x^3y^5)] dx + [2x + 5x^3y^4 \cos(x^3y^5)] dy$.
- (B) $dz = [2x + 2xy + 3x^2 \cos(x^3y^5)] dx + [2x + 5x^3y^4 \cos(x^3y^5)] dy$.
- (C) $dz = [2x + 2y + 3x^2 \cos(x^3y^5)] dx + [2x + 5y^4 \cos(x^3y^5)] dy$.
- (D) $dz = [2x + 2y + 3x^2y^5 \cos(x^3y^5)] dx + [2x + 5x^3y^4 \cos(x^3y^5)] dy$.

Câu 5. Tìm vi phân cấp hai của hàm số $z = x^3 + y^2 - 4xy$.

- (A) $d^2z = 6xdx^2 - 8dxdy + 2dy^2$. (B) $d^2z = 6xdx^2 - 4dxdy + 2dy^2$.
 (C) $d^2z = 6xdx^2 + 8dxdy + 2dy^2$. (D) $d^2z = 6xdx^2 + 4dxdy + 2dy^2$.

Câu 6. Tìm vi phân cấp hai của hàm số $z = y \ln x$.

- (A) $d^2z = -\frac{y}{x^2}dx^2 + \frac{2}{x}dxdy + \frac{1}{x}dy^2$. (B) $d^2z = -\frac{y}{x^2}dx^2 + \frac{2}{x}dxdy$.
 (C) $d^2z = \frac{y}{x^2}dx^2 + \frac{2}{x}dxdy$. (D) $d^2z = -\frac{y}{x^2}dx^2 - \frac{2}{x}dxdy$.

Câu 7. Đạo hàm riêng theo biến y của hàm số $f(x, y) = e^x(-x + 3y)$ là

- (A) $-e^x(-x + 3y)$. (B) $3e^x(-x + 3y)$. (C) $-e^x$. (D) $3e^x$.

Câu 8. Vi phân toàn phần của hàm số $f(x, y) = x^2 + x \cos y$ tại điểm $(1; 0)$ là

- (A) $2dx - dy$. (B) $2xdx - x \sin y dy$. (C) 2 . (D) $3dx$.

Câu 9. Các điểm dừng của hàm số $f(x, y) = x^3 + 6xy + y^3$ là

- (A) $M_1(0; 0)$ và $M_2(-1; 2)$. (B) $M_1(0; 0)$ và $M_2(-2; -2)$.
 (C) $M_1(1; 1)$ và $M_2(2; 2)$. (D) $M_1(1; -1)$ và $M_2(-1; 2)$.

Câu 10. Đạo hàm riêng theo biến z của hàm số $f(x, y, z) = \arctan \frac{y}{xz^2}$ là

- (A) $\frac{-2xyz}{y^2 + x^2z^4}$. (B) $\frac{xy}{z^2 + x^2z^4}$. (C) $\frac{2xyz}{x^2 + z^2y^4}$. (D) $\frac{-2xy^2}{x^2 + z^2y^4}$.

Câu 11. Cho hàm số $f(x, y) = \ln \sqrt{x^2 + y^2}$.

- (A) $f''_{xx}(1; 2) = \frac{8}{9}$. (B) $f''_{xx}(1; 2) = -\frac{5}{6}$. (C) $f''_{xx}(1; 2) = \frac{3}{25}$. (D) $f''_{xx}(1; 2) = -\frac{4}{5}$.

Câu 12. Cho hàm ẩn hai biến $z = z(x, y)$ xác định bởi $z - ye^{\frac{z}{x}} = 0$. Đạo hàm riêng của $z(x, y)$ theo biến x bằng

- (A) $\frac{xye^{\frac{z}{x}}}{x^2 + xye^{\frac{z}{x}}}$. (B) $\frac{e^{\frac{z}{x}}}{x^2 - xye^{\frac{z}{x}}}$. (C) $\frac{yze^{\frac{z}{x}}}{xye^{\frac{z}{x}} - x^2}$. (D) $\frac{x}{x^2 + xye^{\frac{z}{x}}}$.

Câu 13. Cho hàm số $f(x, y) = x^3 + 3xy^2 - 30x - 18y$, ($x \geq 0, y \geq 0$). Điểm cực tiểu $M(x_0; y_0)$ của hàm số có $x_0 - y_0$ bằng

- (A) -2 . (B) 3 . (C) -3 . (D) 2 .

Câu 14. Cho hàm số $f(x, y) = x^6 - y^5 - \cos^2 x - 32y$. Hãy chọn khẳng định đúng.

- (A) Hàm f đạt cực đại tại $(1; 2)$. (B) Hàm f đạt cực tiểu tại $(1; 2)$.
 (C) Hàm f không có điểm dừng. (D) Hàm f có một cực trị.

Câu 15. Cho hàm số $f(x, y) = xy^2(1 - x - y)$ với $x > 0, y > 0$. Hãy chọn khẳng định đúng.

- (A) Hàm f đạt cực đại tại $\left(\frac{1}{4}; \frac{1}{2}\right)$. (B) Hàm f đạt cực tiểu tại $\left(\frac{1}{4}; \frac{1}{2}\right)$.
 (C) Hàm f có 2 điểm dừng. (D) Hàm f có 3 điểm dừng.

Câu 16. Cho hàm số $f(x, y) = 2x^2 - 4x + \sin y - \frac{y}{2}$ với $x \in \mathbb{R}, -\pi < y < \pi$. Hãy chọn khẳng định đúng.

- (A) Hàm f đạt cực đại tại $\left(1; \frac{\pi}{3}\right)$. (B) Hàm f đạt cực tiểu tại $\left(1; \frac{\pi}{3}\right)$.
 (C) Hàm f đạt cực tiểu tại $\left(1; -\frac{\pi}{3}\right)$. (D) Hàm f có 1 cực tiểu và 1 cực đại.

BÀI TẬP GIẢI TÍCH 2

Câu 17. Tìm cực trị của hàm số $f(x, y) = \ln(x^2 - 2y)$ với điều kiện $x - y - 2 = 0$. Hãy chọn khẳng định đúng.

- A) Hàm f đạt cực đại tại $(1; -1)$.
- B) Hàm f đạt cực tiểu tại $(1; -1)$.
- C) Hàm f có 2 cực trị.
- D) Hàm f không có cực trị.

Câu 18. Tìm cực trị của hàm số $f(x, y) = \ln |1 + x^2y|$ với điều kiện $x - y - 3 = 0$. Hãy chọn khẳng định đúng.

- A) Hàm f đạt cực tiểu tại $(0; -3)$ và cực đại tại $(2; -1)$.
- B) Hàm f đạt cực đại tại $(0; -3)$ và tại $(2; -1)$.
- C) Hàm f đạt cực đại tại $(0; -3)$ và cực tiểu tại $(2; -1)$.
- D) Hàm f đạt cực tiểu tại $(0; -3)$ và tại $(2; -1)$.

Câu 19. Tìm cực trị của hàm số $f(x, y) = x^2(y - 1) - 3x + 2$ với điều kiện $x - y + 1 = 0$. Hãy chọn khẳng định đúng.

- A) Hàm f đạt cực tiểu tại $(1; 2)$ và cực đại tại $(-1; 0)$.
- B) Hàm f đạt cực đại tại $(1; 2)$ và tại $(-1; 0)$.
- C) Hàm f đạt cực đại tại $(1; 2)$ và cực tiểu tại $(-1; 0)$.
- D) Hàm f đạt cực tiểu tại $(1; 2)$ và tại $(-1; 0)$.

Câu 20. Tìm cực trị của hàm số $f(x, y) = 3x + 4y$ với điều kiện $x^2 + y^2 = 1$. Hãy chọn khẳng định đúng.

- A) Hàm f đạt cực tiểu tại $\left(\frac{3}{5}; \frac{4}{5}\right)$ và cực đại tại $\left(-\frac{3}{5}; -\frac{4}{5}\right)$.
- B) Hàm f đạt cực đại tại $\left(\frac{3}{5}; \frac{4}{5}\right)$ và tại $\left(-\frac{3}{5}; -\frac{4}{5}\right)$.
- C) Hàm f đạt cực đại tại $\left(\frac{3}{5}; \frac{4}{5}\right)$ và cực tiểu tại $\left(-\frac{3}{5}; -\frac{4}{5}\right)$.
- D) Hàm f đạt cực tiểu tại $\left(\frac{3}{5}; \frac{4}{5}\right)$ và tại $\left(-\frac{3}{5}; -\frac{4}{5}\right)$.

Câu 21. Cho hàm số $f(x, y) = x^2 - 2x + y^2$. Hãy chọn khẳng định đúng.

- A) Hàm f đạt cực đại tại $M(1; 0)$.
- B) Hàm f đạt cực tiểu tại $M(1; 0)$.
- C) Hàm f có một cực đại và một cực tiểu.
- D) Hàm f không có cực trị.

Câu 22. Cho hàm số $f(x, y) = x^4 - 8x^2 + y^2 + 5$. Hãy chọn khẳng định đúng.

- A) Hàm f đạt cực đại tại $(0; 0)$.
- B) Hàm f đạt cực tiểu tại $(2; 0)$ và tại $(-2; 0)$.
- C) Hàm f chỉ có đúng hai điểm dừng.
- D) Hàm f đạt cực đại tại $(2; 0)$ và tại $(-2; 0)$.

Câu 23. Cho hàm số $f(x, y) = x^2 - 2x + 5$. Hãy chọn khẳng định đúng.

- A) Hàm f đạt cực đại tại $M(0; 0)$.
- B) Hàm f đạt cực tiểu tại $M(0; 0)$.
- C) Hàm f có một điểm dừng.
- D) Hàm f có một cực đại và một cực tiểu.

Câu 24. Cho hàm số $f(x, y) = x^2 - xy + y^2$. Hãy chọn khẳng định đúng.

BỘ MÔN TOÁN GIẢI TÍCH

- Ⓐ Hàm f đạt cực đại tại $M(0; 0)$.
- Ⓑ Hàm f đạt cực tiểu tại $M(0; 0)$.
- Ⓒ Hàm f không có cực trị.
- Ⓓ Hàm f không có điểm dừng.

Câu 25. Cho hàm số $f(x, y) = x^3 + y^3 - 12x - 3y$. Hãy chọn khẳng định đúng.

- Ⓐ Hàm f đạt cực đại tại $M(2; 1)$.
- Ⓑ Hàm f đạt cực tiểu tại $M(2; 1)$.
- Ⓒ Hàm f có đúng 2 điểm dừng.
- Ⓓ Hàm f có đúng 4 điểm dừng.

Câu 26. Cho hàm số $f(x, y) = x^4 - y^4 - 4x + 32y$. Hãy chọn khẳng định đúng.

- Ⓐ Hàm f đạt cực đại tại $M(1; 2)$.
- Ⓑ Hàm f đạt cực tiểu tại $M(1; 2)$.
- Ⓒ Hàm f không có cực trị.
- Ⓓ Hàm f không có điểm dừng.

CHƯƠNG 2: TÍCH PHÂN NHIỀU LỚP

PHÂN TỰ LUẬN

Bài 1. Tính các tích phân hai lớp sau:

- a) $I = \iint_D (x - y) dx dy$; D là miền giới hạn bởi các đường $y = x, y = 2 - x^2$
- b) $I = \iint_D (x^2 + 2y) dx dy$; D là miền giới hạn bởi các đường $y = x^2 - 1, y = x + 1$.
- c) $I = \iint_D (x + y) dx dy$; D là miền phẳng giới hạn bởi các đường $y = x, y = 0, x + y = 2, x + y = 4$.
- d) $I = \iint_D (x^3 + 4y) dx dy$; D là miền phẳng được giới hạn bởi các đường $y = 0; x = \sqrt{y}; y = 2 - x$.
- e) $I = \iint_D xy dx dy$; D là miền phẳng được giới hạn bởi các đường $x = 0, y = 1, x^2 + y^2 = 2x$.
- f) $I = \iint_D (3x + 4y) dx dy$; D là tam giác OBC , $O(0, 0), B(-2, 2), C(2, 0)$.
- g) $I = \iint_D \frac{x^2}{y^2} dx dy$; D là miền phẳng được giới hạn bởi các đường $x = 2, xy = 1, y = x$.
- h) $I = \iint_D xy dx dy$; D là miền phẳng được giới hạn bởi các đường $y = \sqrt{2x - x^2}, y = 0$
- i) $I = \iint_D x^2 y dx dy$; D là miền phẳng được giới hạn bởi các đường $y = x^2, y = \frac{x^2}{4}, y = 1$
- j) $I = \iint_D (x + 2y) dx dy$; D là tam giác ABC , với $A(1, 1), B(2, 2), C(4, -2)$.

Bài 2. Tính các tích phân sau bằng cách đổi biến:

a) $I = \iint_D (x^3 - y^3) dx dy$; D giới hạn bởi $x + y = 1$, $x + y = 4$, $x - y = 1$, $x - y = -1$.

b) $I = \iint_D \sqrt{(x^2 + y^2)^3} dx dy$; D giới hạn bởi các đường $x = \sqrt{1 - y^2}$, $y = x$, $y = -x$.

c) $I = \iint_D (1 + xy) dx dy$; với $D = \{1 \leq x^2 + y^2 \leq 2x\}$

d) $I = \iint_D \sqrt{x^2 + y^2} dx dy$, với $D = \{x^2 + y^2 \leq x, y \geq 0\}$

e) $I = \iint_D \ln(1 + x^2 + y^2) dx dy$; trong đó $D = \{x^2 + y^2 \leq R^2, y \geq 0\}$.

Bài 3. Tính các tích phân ba lớp sau:

a) $I = \iiint_V x dx dy dz$; V là tứ diện được giới hạn bởi các mặt $x + y + z = 1$, $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$.

b) $I = \iiint_V (z + x^2 + y^2) dx dy dz$; V được giới hạn bởi các mặt $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, $z = 1$.

c) $I = \iiint_V z \sqrt{x^2 + y^2} dx dy dz$; V giới hạn bởi $z = \sqrt{2 - x^2 - y^2}$, $z = \sqrt{x^2 + y^2}$

d) $I = \iiint_V \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} dx dy dz$; trong đó $V = \{x^2 + y^2 + z^2 \leq z\}$

e) $I = \iiint_V (x^2 + y^2 + z^2) dx dy dz$; trong đó $V = \{1 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 4\}$.

PHẦN TRẮC NGHIỆM

Câu 1. Cho miền D được giới hạn bởi các đường thẳng $x = 3$, $x = 5$, $3x - 2y + 4 = 0$, $3x - 2y + 1 = 0$.

Tích phân $I = \iint_D f(x, y) dx dy$ được đưa về tích phân lặp là

Ⓐ $I = \int_3^5 dy \int_{\frac{3x+1}{2}}^{\frac{3x+4}{2}} f(x, y) dx.$

Ⓑ $I = \int_3^5 dx \int_{\frac{3x+1}{2}}^{\frac{3x+4}{2}} f(x, y) dy.$

Ⓒ $I = \int_{\frac{3x+1}{2}}^{\frac{3x+4}{2}} dy \int_3^5 f(x, y) dx.$

Ⓓ $I = \int_3^5 dy \int_{\frac{3x+4}{2}}^{\frac{3x+1}{2}} f(x, y) dx.$

Câu 2. Miền phẳng $D = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 + 2y \leq 0, x + y \leq 0 \right\}$ được viết lại trong tọa độ cực là:

- (A) $D_{r\varphi} = \left\{ (\varphi, r) \mid -\frac{\pi}{4} \leq \varphi \leq \pi; 0 \leq r \leq -2 \sin \varphi \right\}$.
- (B) $D_{r\varphi} = \left\{ (\varphi, r) \mid -\frac{\pi}{4} \leq \varphi \leq 0; 0 \leq r \leq -2 \sin \varphi \right\}$.
- (C) $D_{r\varphi} = \left\{ (\varphi, r) \mid -\pi \leq \varphi \leq -\frac{\pi}{4}; 0 \leq r \leq -2 \sin \varphi \right\}$.
- (D) $D_{r\varphi} = \left\{ (\varphi, r) \mid -\pi \leq \varphi \leq -\frac{\pi}{4}; -2 \sin \varphi \leq r \leq 0 \right\}$.

Câu 3. Cho miền phẳng $D = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 4y \right\}$. Tích phân hai lớp $I = \iint_D f(x, y) dx dy$

được viết lại trong tọa độ cực là

- (A) $I = \int_0^\pi d\varphi \int_0^{4 \sin \varphi} f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) r d\varphi$.
- (B) $I = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{4 \sin \varphi} f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) r d\varphi$.
- (C) $I = \int_0^\pi d\varphi \int_0^{2 \sin \varphi} f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) r d\varphi$.
- (D) $I = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{2 \sin \varphi} f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) r d\varphi$.

Câu 4. Giá trị của tích phân $I = 2 \int_0^1 dy \int_0^y e^{x+y} dx$ là

- (A) $I = e^2 - 1$.
- (B) $I = e^2 - 2e + 1$.
- (C) $I = e^2 + 2e + 1$.
- (D) $I = e^2 + 2e = 1$.

Câu 5. Giá trị của tích phân $I = \int_0^2 dx \int_0^{\ln x} 6xe^y dx$ là

- (A) $I = 4$.
- (B) $I = 5$.
- (C) $I = 6$.
- (D) $I = 7$.

Câu 6. Cho miền phẳng $D = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1; x \geq 0; y \geq 0 \right\}$. Giá trị của tích phân $I = \iint_D \frac{4 dx dy}{\sqrt{1 + x^2 + y^2}}$ là

- (A) $I = 2\pi$.
- (B) $I = (\sqrt{3} - \sqrt{2}) 2\pi$.
- (C) $I = 2\pi\sqrt{2}$.
- (D) $I = (\sqrt{2} - 1) 2\pi$.

Câu 7. Cho miền phẳng $D = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1; x \geq 0; y \geq 0 \right\}$. Giá trị của tích phân $I = \iint_D x^2 y^3 dx dy$ là

- (A) $I = \frac{2\pi}{15}$.
- (B) $I = \frac{4\pi}{15}$.
- (C) $I = \frac{2}{105}$.
- (D) $I = \frac{4}{105}$.

Câu 8. Trong không gian $Oxyz$, cho khối Ω được giới hạn bởi các mặt $x = 0, y = 0, z = 0$ và $x + y + z + 1 = 0$. Tích phân ba lớp $I = \iiint_{\Omega} dx dy dz$ được đưa về tích phân lặp là

- (A) $I = \int_0^1 dy \int_0^{1-y} dx \int_0^{1-x-y} f(x, y, z) dz$.
- (B) $I = \int_{-1}^0 dy \int_{-1-y}^0 dx \int_{-1-x-y}^0 f(x, y, z) dz$.
- (C) $I = \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \int_0^{1-x-y} f(x, y, z) dz$.
- (D) $I = \int_{-1}^0 dx \int_{-1-y}^0 dy \int_{-1-x-y}^0 f(x, y, z) dz$.

Câu 9. Trong không gian $Oxyz$, cho khối Ω được giới hạn bởi các mặt $z = 4$ và $z = x^2 + y^2$. Tích phân ba lớp $I = \iiint_{\Omega} f(x, y, z) dx dy dz$ được viết trong tọa độ trụ là

- (A) $I = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^2 r dr \int_{r^2}^4 f(r \cos \varphi, r \sin \varphi, z) dz.$ (B) $I = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^4 r dr \int_{r^2}^4 f(r \cos \varphi, r \sin \varphi, z) dz.$
 (C) $I = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^2 r dr \int_4^{r^2} f(r \cos \varphi, r \sin \varphi, z) dz.$ (D) $I = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^4 r dr \int_4^{r^2} f(r \cos \varphi, r \sin \varphi, z) dz.$

Câu 10. Trong không gian $Oxyz$, cho khối Ω được giới hạn bởi các mặt $z = 0$, $z = 1$ và $x^2 + y^2 + 2y = 0$. Tích phân ba lớp $I = \iiint_{\Omega} z \sqrt{x^2 + y^2} dx dy dz$ được viết trong tọa độ trụ là

- (A) $I = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{-2 \sin \varphi} r^2 dr \int_0^1 z dz.$ (B) $I = \int_0^{\pi} d\varphi \int_0^{-2 \sin \varphi} r^2 dr \int_0^1 z dz.$
 (C) $I = \int_{\pi}^{2\pi} d\varphi \int_0^{2 \sin \varphi} r^2 dr \int_0^1 z dz.$ (D) $I = \int_0^{\pi} d\varphi \int_0^{2 \sin \varphi} r^2 dr \int_0^1 z dz.$

Câu 11. Trong không gian $Oxyz$, cho khối $\Omega = \{1 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 4\}$. Tích phân ba lớp $I = \iiint_{\Omega} f(x, y, z) dx dy dz$ được viết trong tọa độ cầu là

- (A) $I = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} \sin \theta d\theta \int_1^4 r f(r \sin \theta \cos \varphi, r \sin \theta \sin \varphi, r \cos \theta) dr.$
 (B) $I = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} \sin \theta d\theta \int_1^4 r^2 f(r \sin \theta \cos \varphi, r \sin \theta \sin \varphi, r \cos \theta) dr.$
 (C) $I = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} \sin \theta d\theta \int_1^2 r^2 f(r \sin \theta \sin \varphi, r \sin \theta \cos \varphi, r \cos \theta) dr.$
 (D) $I = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} \sin \theta d\theta \int_1^2 r^2 f(r \sin \theta \cos \varphi, r \sin \theta \sin \varphi, r \cos \theta) dr.$

Câu 12. Giá trị của tích phân $I = \int_0^1 dx \int_0^x dy \int_0^{y^2} dz$

- (A) $I = \frac{1}{12}.$ (B) $I = \frac{1}{6}.$ (C) $I = \frac{1}{3}.$ (D) $I = \frac{1}{2}.$

Câu 13. Cho miền phẳng $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$. Giá trị của tích phân $I = \iint_D \sqrt{x^2 + y^2} dx dy$ là

- (A) $I = \frac{2\pi}{3}.$ (B) $I = \frac{\pi}{3}.$ (C) $I = \frac{4\pi}{3}.$ (D) $I = \frac{\pi}{2}.$

Câu 14. Cho miền phẳng $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = x^2, y = 1^3\}$. Giá trị của tích phân $I = \iint_D 2y dx dy$ là

- (A) $I = \frac{2}{5}.$ (B) $I = \frac{4}{3}.$ (C) $I = \frac{2}{3}.$ (D) $I = \frac{1}{5}.$

Câu 15. Cho miền phẳng $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq x^3\}$. Tích phân hai lớp $I = \iint_D f(x, y) dx dy$

được đưa về tích phân lặp là

- (A) $I = \int_0^1 dy \int_{\sqrt[3]{y}}^1 f(x, y) dx.$
 (B) $I = \int_0^1 dy \int_0^1 f(x, y) dx.$
 (C) $I = \int_0^1 dy \int_1^{\sqrt[3]{y}} f(x, y) dx.$
 (D) $I = \int_0^1 dx \int_0^1 f(x, y) dy.$

Câu 16. Cho miền phẳng $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1, y \geq 0\}$. Tích phân hai lớp $I = \iint_D f(x, y) dx dy$

được đưa về tích phân lặp là

- (A) $I = \int_{-1}^1 dy \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} f(x, y) dx.$
 (B) $I = \int_0^1 dy \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} f(x, y) dx.$
 (C) $I = \int_{-1}^1 dy \int_0^{\sqrt{1-y^2}} f(x, y) dx.$
 (D) $I = \int_0^1 dy \int_0^{\sqrt{1-y^2}} f(x, y) dx.$

Câu 17. Trong không gian $Oxyz$, cho khối Ω được giới hạn bởi các mặt $z = 0, z = 1$ và $x^2 + y^2 = 1$.

Giá trị của tích phân $I = \iiint_{\Omega} \frac{dx dy dz}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ là

- (A) $I = 2\pi.$ (B) $I = \pi.$ (C) $I = 3\pi.$ (D) $I = 4\pi.$

Câu 18. Trong không gian $Oxyz$, cho khối Ω được giới hạn bởi các mặt $z = 0, z = 3$ và $x^2 + y^2 = 4$.

Giá trị của tích phân $I = \iiint_{\Omega} (\sqrt{x^2 + y^2} + 1) dx dy dz$ là

- (A) $I = \frac{84\pi}{3}.$ (B) $I = \frac{80\pi}{3}.$ (C) $I = \frac{4\pi}{3}.$ (D) $I = \frac{8\pi}{3}.$

Câu 19. Trong không gian $Oxyz$, cho khối $\Omega = \{x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2, z \geq 0\}$. Tích phân ba lớp $I = \iiint_{\Omega} \frac{dx dy dz}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$ được viết trong tọa độ cầu là

- (A) $I = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin \theta d\theta \int_0^R r^2 dr.$
 (B) $I = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin \theta d\theta \int_0^R r dr.$
 (C) $I = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \theta d\theta \int_0^R r dr.$
 (D) $I = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \theta d\theta \int_0^R r^2 dr.$

Câu 20. Cho miền D được giới hạn bởi các đường thẳng $y = \sqrt{x}, y = x^3$. Tích phân bội hai

$I = \iint_D dx dy$ có giá trị là

- (A) $I = \frac{\sqrt{2}}{3}.$ (B) $I = \frac{5}{12}.$ (C) $I = \frac{5}{6}.$ (D) $I = \frac{5}{3}.$

Câu 21. Cho miền phẳng $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 16, x \geq 0, y \geq 0\}$. Tích phân bội hai $I = \iint_D xy dx dy$ có giá trị là

(A) $I = 32$. (B) $I = 64$. (C) $I = 90$. (D) $I = 120$.

Câu 22. Trong không gian $Oxyz$, cho khối $\Omega = [0, 1] \times [0, 1] \times [0, 1]$. Giá trị của tích phân ba lớp $I = \iiint_{\Omega} 24xy^2z^3$ là

(A) $I = 1$. (B) $I = 2$. (C) $I = 3$. (D) $I = 4$.

Câu 23. Trong không gian $Oxyz$, cho khối Ω được giới hạn bởi các mặt $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ và $z = 1$. Giá trị của tích phân ba lớp $I = \iiint_{\Omega} 2z dx dy dz$ là

(A) $I = \frac{\pi}{2}$. (B) $I = \frac{3\pi}{2}$. (C) $I = 2\pi$. (D) $I = \pi$.

Câu 24. Cho miền D giới hạn bởi các đường $y = x^2$ và $y = 2 - x$. Tích phân bội hai $I = \iint_D (x - y) dx dy$ có giá trị là

(A) $I = \frac{189}{20}$. (B) $I = -\frac{189}{20}$. (C) $I = -\frac{81}{20}$. (D) $I = \frac{81}{20}$.

Câu 25. Cho miền phẳng $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 2x, y \geq 0\}$. Tích phân bội hai $I = \iint_D (\sqrt{x^2 + y^2} + x) dx dy$ được viết lại trong tọa độ cực là

(A) $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{2\cos\varphi} (1 + \cos\varphi) r^2 d\varphi$. (B) $I = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{2\cos\varphi} (1 + \cos\varphi) r^2 d\varphi$.

(C) $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{2\cos\varphi} (1 + \cos\varphi) r d\varphi$. (D) $I = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{2\cos\varphi} (1 + \cos\varphi) r d\varphi$.

CHƯƠNG 3: TÍCH PHÂN ĐƯỜNG VÀ TÍCH PHÂN MẶT

PHẦN TỰ LUẬN

Bài 1. Tính tích phân đường loại 1

a) $I = \int_{\widetilde{AB}} x^2 ds$, \widetilde{AB} là cung $y = \ln x$ và $A(1, 0)$, $B(e, 1)$.

b) $I = \int_{\widetilde{OA}} \frac{ds}{\sqrt{x^2 + y^2 + 4}}$, \widetilde{OA} là đoạn thẳng nối gốc $O(0, 0)$ với điểm $A(1, 2)$.

c) $I = \int_L (x^2 + y^2) ds$, L là biên của tam giác OAB với $O(0, 0)$, $A(1, 1)$, $B(-1, 1)$.

d) $I = \int_L (x + y) ds; L : x^2 + y^2 = ax, a > 0$

e) $I = \int_L (x + y + z) ds; L$ là đường cong $x = 2 \cos t, y = 2 \sin t, z = t, 0 \leq t \leq 2\pi$

f) $I = \int_C (x^{\frac{4}{3}} + y^{\frac{4}{3}}) ds; C : x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}, a > 0$

g) $I = \int_C \sqrt{x^2 + y^2} ds; C : x^2 + y^2 = 2y.$

Bài 2. Tính tích phân đường loại 2

a) $I = \int_L ye^{xy} dx + x^4 e^{xy} dy; \text{ trong đó } L: y = x^2 \text{ đi từ } A(0,0) \rightarrow B(1,1).$

b) $I = \int_L \frac{x^2 dy - y^2 dx}{x^{5/3} + y^{5/3}}; \text{ trong đó: } L : \begin{cases} x = R \cos^3 t \\ y = R \sin^3 t \end{cases}, 0 \leq t \leq \pi/2.$

c) $I = \oint_L |x| dx + |y| dy; L$ là đường gấp khúc nối các điểm $A(1,0) \rightarrow B(0,2) \rightarrow C(-1,0) \rightarrow D(0,-2) \rightarrow A(1,0).$

d) $I = \oint_{L^+} 2(x^2 + y^2) dx + (x + y)^2 dy, L$ là biên của tam giác $\triangle LMN, L(1,1), M(2,2), N(1,3).$

e) $I = \oint_{L^+} (xy + x + y) dx + (xy + x - y) dy; \text{ trong đó } L: x^2 + y^2 = ax, a > 0.$

f) $I = \int_{(2,1)}^{(4,3)} e^{xy}(1 + xy) dx + x^2 e^{xy} dy.$

g) $I = \oint_{L^+} (-x^2 y) dx + xy^2 dy; L : \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{1} = 1.$

h) $I = \oint_{L^+} \frac{(x + y) dx - (x - y) dy}{x^2 + y^2}; L : x^2 + y^2 = 4.$

i) $I = \int_{(0,0)}^{(1,1)} (x + y) dx + (x - y) dy.$

j) $I = \int_L (x + y + z) dx - x dy + xy dz; \text{ trong đó } L \text{ là đoạn thẳng đi từ } A(1,2,3) \text{ đến } B(2,4,5).$

BÀI TẬP GIẢI TÍCH 2

Bài 3. Tính tích phân mặt loại 1

- a) $I = \iint_S (x^2 + y^2) dS$; S là phần mặt cầu $x^2 + y^2 + z^2 = a^2, z \geq 0$.
- b) $I = \iint_S (x^2 + z^2) dS$; trong đó S là phần mặt $z = \sqrt{2 - x^2 - y^2}, z \geq 1$.
- c) $I = \iint_S \frac{dS}{(1 + x + y)^2}$; S là phần mặt $x + y + z = 1$ nằm trong góc phần tám thứ nhất.
- d) $\iint_S xyz dS$, S là phần mặt $z = x^2 + y^2$ giới hạn bởi $z = 1$.
- e) $I = \iint_S \left(z + 2x + \frac{4y}{3} \right) dS$; trong đó S là phần mặt $\frac{x}{2} + \frac{y}{3} + \frac{z}{4} = 1$ nằm trong góc phần tám thứ nhất.

Bài 4. Tính tích phân mặt loại 2

- a) $I = \iint_S z dx dy$; S là phía ngoài mặt cầu $x^2 + y^2 + z^2 = 1; z \geq 0$.
- b) $I = \iint_S yz dx dy$; S là mặt phía ngoài của vật thể giới hạn bởi $x^2 + y^2 \leq 1, 0 \leq z \leq 1$.
- c) $I = \iint_S y^2 dx dz + z^2 dx dy$; S là mặt phía ngoài của vật thể giới hạn bởi các mặt $z = x^2 + y^2, z = 1$.

PHẦN TRẮC NGHIỆM

Câu 1. Cho đường cong C có phương trình tham số $x = 2 \cos t, y = 2 \sin t, 0 \leq t \leq \pi$. Giá trị của tích phân $I = \int_C x^2 ds$ là

A $I = 2\pi.$
 B $I = 4\pi.$
 C $I = 6\pi.$
 D $I = 8\pi.$

Câu 2. Cho đường cong L là đoạn thẳng nối điểm $A(0, 2)$ và điểm $B(-2, -3)$. Giá trị của tích phân $I = \int_L (x^2 - y) ds$ là

A $I = \frac{13}{6} \sqrt{29}.$
 B $I = \frac{13}{8} \sqrt{29}.$
 C $I = \frac{11}{6} \sqrt{29}.$
 D $I = \frac{11}{8} \sqrt{29}.$

Câu 3. Cho đường cong \widetilde{OA} có phương trình $y = x^2$ nối điểm $O(0, 0)$ và điểm $A(-2, 4)$. Giá trị của tích phân $I = \int_{\widetilde{OA}} \frac{3y}{\sqrt{4x^2 + 1}} ds$ là

A $I = 12.$
 B $I = -12.$
 C $I = -8.$
 D $I = 8.$

Câu 4. Cho đường tròn C có phương trình $x^2 + y^2 - 2y = 0$. Giá trị của tích phân $I = \int_C (x^2 + y^2) ds$

là

- (A) $I = 4\pi\sqrt{2}$. (B) $I = 4\pi$. (C) $I = 8\pi$. (D) $I = 8\pi\sqrt{2}$.

Câu 5. Một dây thép có dạng đoạn thẳng trong mặt phẳng Oxy nối điểm $A(1, 1)$ và điểm $B(3, -5)$ với hàm mật độ khối lượng là $\rho(x, y) = (x - y)^2$. Khối lượng của dây thép đã cho là

- (A) $m = \frac{16}{3}\sqrt{10}$. (B) $m = \frac{32}{3}\sqrt{10}$. (C) $m = \frac{125}{3}\sqrt{10}$. (D) $m = \frac{128}{3}\sqrt{10}$.

Câu 6. Một dây thép có dạng parabol $y = x^2$ trong mặt phẳng Oxy nối điểm $O(0, 0)$ và điểm $A(1, 1)$ với hàm mật độ khối lượng là $\rho(x, y) = x\sqrt{1 + 4y}$. Khối lượng của dây thép đã cho là

- (A) $m = \frac{3}{4}$. (B) $m = \frac{4}{3}$. (C) $m = \frac{3}{2}$. (D) $m = \frac{2}{3}$.

Câu 7. Cho đường cong \widetilde{AB} có phương trình tham số $x = t^2, y = 4 - t$ với $A(0, 4)$ và $B(4, 6)$. Giá trị của tích phân $I = \int_{\widetilde{AB}} x dx + (x - y) dy$ là

- (A) $I = \frac{2}{3}$. (B) $I = -\frac{2}{3}$. (C) $I = \frac{34}{3}$. (D) $I = -\frac{34}{3}$.

Câu 8. Tích phân không phụ thuộc vào các đường tròn từng khúc nối hai điểm A và B là

- (A) $I = \int_{\widetilde{AB}} (4xy^3 + 2x) dx + (y^4 + 2y - x) dy$.
 (B) $I = \int_{\widetilde{AB}} (4xy^3 + 2x - 1) dx + (y^4 + 6x^2y^2 - 1) dy$.
 (C) $I = \int_{\widetilde{AB}} (4xy^3 + 2x) dx - (y^4 + 2y - x) dy$.
 (D) $I = \int_{\widetilde{AB}} (4xy^3 + 2x - 1) dx - (y^4 + 6x^2y^2 - 1) dy$.

Câu 9. Cho đường cong \widetilde{AB} có phương trình $y = \ln x$ với $A(1, 0)$ và $B(e, 1)$. Giá trị của tích phân $I = \int_{\widetilde{AB}} 5x^4y^5 dx + 5x^5y^4 dy$ là

- (A) $I = 0$. (B) $I = -e^3$. (C) $I = e^5$. (D) $I = -e^5$.

Câu 10. Cho đường cong \widetilde{AB} có phương trình $y = x^3 - 3x + 2$ với $A(1, 0)$ và $B(0, 2)$. Giá trị của tích phân $I = \int_{\widetilde{AB}} e^y dx + xe^y dy$ là

- (A) $I = 1$. (B) $I = -1$. (C) $I = e$. (D) $I = -e$.

Câu 11. Công sinh ra khi lực $\vec{F}(x, y) = 3x^2\vec{i} + 2y\vec{j}$ tác động lên chất điểm $M(x, y)$ làm dịch chuyển từ điểm $A(2, 4)$ đến điểm $B(-1, 1)$ trên đường cong $C: y = x^2$ là

- (A) $W = -24$. (B) $W = 24$. (C) $W = -12$. (D) $W = 12$.

Câu 12. Công sinh ra khi lực $\vec{F}(x, y, z) = x\vec{i} - xy\vec{j} - xyz\vec{k}$ tác động lên chất điểm $M(x, y, z)$ làm dịch chuyển từ điểm $A(1, 1, -1)$ đến điểm $B(1, 0, 0)$ trên đường cong $C: x = 1, y = t^2, z = -t$ là

- Ⓐ $W = -\frac{1}{4}$. Ⓑ $W = \frac{1}{4}$. Ⓒ $W = \frac{3}{4}$. Ⓓ $W = -\frac{3}{4}$.

Câu 13. Cho tích phân $I = \iint_S x dS$, trong đó S là hình $\triangle ABC$ với $A(1, 0, 0)$, $B(0, 2, 0)$, $C(0, 0, 4)$.

Giá trị của tích phân I là

- Ⓐ $I = \frac{\sqrt{21}}{3}$. Ⓑ $I = \frac{\sqrt{21}}{4}$. Ⓒ $I = \frac{\sqrt{21}}{5}$. Ⓓ $I = \frac{\sqrt{21}}{6}$.

Câu 14. Cho S là phần mặt parabolic có phương trình $z = x^2 + y^2$ nằm dưới mặt phẳng $z = 4$. Giá trị của tích phân $I = \iint_S z dS$ là

- Ⓐ $I = \frac{391\sqrt{17} + 1}{120}\pi$. Ⓑ $I = \frac{391\sqrt{17}}{120}\pi$. Ⓒ $I = \frac{391\sqrt{17} + 1}{60}\pi$. Ⓓ $I = \frac{391\sqrt{17}}{60}\pi$.

Câu 15. Diện tích của phần mặt nón $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ nằm phía dưới mặt phẳng $z = 1$ là

- Ⓐ $S = 4\pi\sqrt{2}$. Ⓑ $S = 3\pi\sqrt{2}$. Ⓒ $S = 2\pi\sqrt{2}$. Ⓓ $S = \pi\sqrt{2}$.

Câu 16. Diện tích của phần mặt parabolic $z = 4 - x^2 - y^2$ nằm trong mặt trụ $x^2 + y^2 - 2y = 0$ được tính theo công thức

- Ⓐ $S = \int_0^\pi d\varphi \int_0^{2\sin\varphi} r\sqrt{1+r^2} dr$. Ⓑ $S = \int_0^\pi d\varphi \int_0^{2\sin\varphi} r\sqrt{1+4r^2} dr$.
 Ⓒ $S = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{2\sin\varphi} r\sqrt{1+8r^2} dr$. Ⓓ $S = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\sin\varphi} r\sqrt{1+16r^2} dr$.

Câu 17. Tích phân mặt loại hai $I = \iint_S x dx dy - y dz dx + z dy dz$ với S là một phần mặt phía trên

của mặt phẳng $x + 2y - 2z = 0$ có biểu diễn thành tích phân mặt loại một là

- Ⓐ $I = \frac{1}{3} \iint_S (x - 2y - 2z) dS$. Ⓑ $I = -\frac{1}{3} \iint_S (2x - 2y + z) dS$.
 Ⓒ $I = -\frac{1}{3} \iint_S (x - 2y - 2z) dS$. Ⓓ $I = \frac{1}{3} \iint_S (2x + 2y - z) dS$.

Câu 18. Tích phân mặt loại hai $I = \iint_S dx dy$ với S là một phần mặt phía dưới của mặt phẳng

$z = 2$ được giới hạn bởi $x^2 + y^2 \leq 1$, có giá trị là

- Ⓐ $I = \pi$. Ⓑ $I = -\pi$. Ⓒ $I = 2\pi$. Ⓓ $I = -2\pi$.

Câu 19. Tích phân mặt loại hai $I = 12 \iint_S x dx dy$ với S là một phần mặt phía trên của mặt phẳng

$z = 2$ được giới hạn bởi $x \geq 0$, $y \geq 0$ và $x + y \leq 1$ có giá trị là

- Ⓐ $I = 1$. Ⓑ $I = 4$. Ⓒ $I = 2$. Ⓓ $I = 3$.

Câu 20. Tích phân mặt loại hai $I = \iint_S 4y^2 z dx dy + x^2 y dx dz + x^3 dy dz$, với S là mặt biên ngoài

của vật thể được giới hạn bởi $z = 2$, $z = 0$ và $x^2 + y^2 = 1$, có giá trị là

- Ⓐ $I = \pi$. Ⓑ $I = 2\pi$. Ⓒ $I = 4\pi$. Ⓓ $I = 8\pi$.

Câu 21. Tích phân mặt loại hai $I = \iint_S x^2 z dx dy + x z^2 dy dz + \frac{y^3}{3} dz dx$, với S là mặt biên ngoài của hình cầu $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$, có giá trị là
 (A) $I = \frac{\pi}{5}$. (B) $I = \frac{2\pi}{5}$. (C) $I = \frac{3\pi}{5}$. (D) $I = \frac{4\pi}{5}$.

Câu 22. Tích phân mặt loại hai $I = \iint_S 3x dy dz + 2z dz dx + dx dy$, với S là mặt biên ngoài của hình cầu $x^2 + y^2 + z^2 \leq 2z$, có giá trị là
 (A) $I = \pi$. (B) $I = 2\pi$. (C) $I = 4\pi$. (D) $I = 8\pi$.

Câu 23. Tích phân mặt loại hai $I = \iint_S x^2 dy dz + z^2 dx dy$, với S là mặt biên ngoài của vật thể bị chặn được giới hạn bởi $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ và $z = 1$, có giá trị là
 (A) $I = \frac{\pi}{2}$. (B) $I = \frac{3\pi}{4}$. (C) $I = \frac{2\pi}{3}$. (D) $I = \frac{5\pi}{6}$.

Câu 24. Cho S là một phần của mặt phẳng $x + y + z = 1$ được giới hạn bởi $x^2 + y^2 \leq 1$ có hàm mật độ khối lượng $\rho(x, y, z) = x^2 + y^2$. Khối lượng của S là
 (A) $m = \frac{\pi\sqrt{3}}{2}$. (B) $m = \frac{\pi\sqrt{3}}{3}$. (C) $m = \frac{\pi\sqrt{3}}{4}$. (D) $m = \frac{\pi\sqrt{3}}{6}$.

Câu 25. Cho S là một phần của mặt parabolic $z = x^2 + y^2$ được giới hạn bởi $x^2 + y^2 \leq 4$ có hàm mật độ khối lượng $\rho(x, y, z) = \sqrt{1 + 4z}$. Khối lượng của S được tính theo công thức
 (A) $m = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^2 r(1 + 4r^2) dr$. (B) $m = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^2 r\sqrt{1 + 4r^2} dr$.
 (C) $m = \int_0^{\pi} d\varphi \int_0^2 r(1 + 4r^2) dr$. (D) $m = \int_0^{\pi} d\varphi \int_0^2 r\sqrt{1 + 4r^2} dr$.

CHƯƠNG 4: PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN

PHẦN TỰ LUẬN

Bài 1. Giải các phương trình tách biến

- (1) $x\sqrt{1 - y^2} dx + y\sqrt{1 - x^2} dy = 0$
- (2) $y' = x^2 + xy + \frac{y^2}{4} - 1$
- (3) $y' = (x + y + 1)^2$
- (4) $y' = \cos(x - y - 1)$

Bài 2 . Giải các phương trình đẳng cấp

- (1) $y' = e^{-\frac{y}{x}} + \frac{y}{x}$
- (2) $xy' - y + x \cos \frac{y}{x} = 0$
- (3) $xy' - y = (x + y) \ln \frac{x + y}{x}$
- (4) $y' = \frac{y}{x} + \cos \frac{y}{x}$
- (5) $y' = \frac{3x^2 - xy - y^2}{x^2}$
- (6) $y' = \frac{x^2 - xy + y^2}{xy}$

Bài 3. Giải các phương trình vi phân tuyến tính cấp 1

BÀI TẬP GIẢI TÍCH 2

(1) $y' - \frac{2}{x+1}y = (x+1)^3$

(4) $(x^2 + y)dx = xdy$

(2) $y' + y = \frac{1}{e^x(1-x)}, y(2) = 1.$

(5) $(y + \ln x)dx - xdy = 0$

(3) $y' + 2xy = xe^{-x^2}$

(6) $y' \cos y + \sin y = x$

Bài 4. Giải các phương trình Bernoulli

(1) $y' - 2xy = 3x^3y^2$

(4) $xy' + y = y^2 \ln x; y(1) = 1$

(2) $2y' - \frac{x}{y} = \frac{xy}{x^2 - 1}$

(5) $ydx - (x^2y^2 + x)dy = 0$

(3) $y' + 2y = y^2e^x$

(6) $xy' - 2x\sqrt{y} \cos x = -2y$

Bài 5. Giải các phương trình vi phân toàn phần

(1) $(x + y)dx + (x - y)dy = 0; y(0) = 0.$

(3) $\frac{2x}{y^3}dx + \frac{y^2 - 3x^2}{y^4}dy = 0$

(2) $(1 + e^{\frac{x}{y}})dx + e^{\frac{x}{y}}\left(1 - \frac{x}{y}\right)dy = 0$

(4) $(1 + y^2 \sin 2x)dx - 2y \cos^2 x dy = 0$

Bài 6. Giải các phương trình vi phân tuyến tính cấp 2 với hệ số hằng

(1) $y'' - 2y' + y = 2e^{2x}.$

(7) $4y'' - 4y' + y = xe^{\frac{1}{2}x}$

(2) $y'' - 6y' + 9y = \cos 3x.$

(8) $y'' + 2y' + 2y = e^x \sin x.$

(3) $2y'' + 3y' + y = xe^{-x}$

(9) $y'' + 9y = \cos 3x + e^x$

(4) $y'' + 2y' + 2y = x^2 - 4x + 3$

(10) $y'' + y = 4xe^x$

(5) $y'' - 4y' = 4x^2 + 3x + 2;$

(11) $y'' + y = 6 \sin x$

$y(0) = 0, y'(0) = 2$

(12) $y'' - 2y' + y = xe^x$

(6) $y'' + 4y' + 4y = 3e^{-2x},$

(13) $y'' - 4y' = x^2 + 2x + 3$

$y(2) = y'(2) = 0$

(14) $y'' - 2y' = 2 \cos^2 x$

PHẦN TRẮC NGHIỆM

Câu 1. Phương trình vi phân $\frac{dx}{1+x^2} + \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}} = 0$ có nghiệm tổng quát là

(A) $y = C - \sin(\arctan x).$

(B) $y = \sin(C - \arctan x).$

(C) $y = \sin C - \sin(\arctan x).$

(D) $y = \arctan(C - \sin x).$

Câu 2. Phương trình vi phân $x(y^2 + 1)dx = y(x^2 + 1)dy$ có nghiệm tổng quát là

(A) $(x^2 + 1)(y^2 + 1) = C.$

(B) $(x^2 + 1) + (y^2 + 1) = C.$

(C) $(y^2 + 1) = (x^2 + 1) + C.$

(D) $y^2 = C(x^2 + 1) - 1.$

Câu 3. Phương trình vi phân $\frac{dx}{x(y-1)} + \frac{dy}{y(x+2)} = 0$ với điều kiện $y(1) = 1$ có nghiệm là

- (A) $x^2 = ye^{2-x-y}$. (B) $y^2 = xe^{2-x-y}$. (C) $x^2y = e^{2-x-y}$. (D) xy^2ye^{2-x-y} .

Câu 4. Phương trình vi phân $y' = e^{x+y} + e^{x-y}$ với điều kiện $y(0) = 0$ có nghiệm là

- (A) $e^y = \tan\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$. (B) $e^x = \tan\left(y + \frac{\pi}{4}\right)$.
 (C) $e^y = \tan\left(e^x + \frac{\pi}{4} - 1\right)$. (D) $e^x = \tan\left(e^y + \frac{\pi}{4} - 1\right)$.

Câu 5. Phương trình vi phân $y \ln^3 y + \sqrt{x+1}y' = 0$ với điều kiện $y(0) = e$ có nghiệm là

- (A) $\ln^2 y = \frac{1}{2\sqrt{x+1}} + \frac{1}{2}$. (B) $2\ln^2 y = \frac{1}{\sqrt{x+1}} + 1$.
 (C) $\frac{1}{2\ln^2 y} = 2\sqrt{x+1} - \frac{3}{2}$. (D) $\frac{1}{\ln^2 y} = 2\sqrt{x+1} - 1$.

Câu 6. Phương trình vi phân $(xy' - y) \arctan \frac{y}{x} = x$ có nghiệm tổng quát là

- (A) $x^2 + y^2 = Ce^{\frac{y}{x} \arctan \frac{y}{x}}$. (B) $x^2 + y^2 = Ce^{2\frac{y}{x} \arctan \frac{y}{x}}$.
 (C) $x^2 + y^2 = Ce^{\frac{y}{x} + \arctan \frac{y}{x}}$. (D) $x^2 + y^2 = Ce^{\frac{y}{x} - \arctan \frac{y}{x}}$.

Câu 7. Phương trình vi phân $xy' = y + x \sin \frac{y}{x}$ với điều kiện $y(1) = \frac{\pi}{2}$ có nghiệm là

- (A) $1 - \cos \frac{y}{x} = x^2 \left(\cos \frac{y}{x} + 1\right)$. (B) $\cos \frac{y}{x} = x^2 \left(\cos \frac{y}{x} + 1\right) - 1$.
 (C) $\cos \frac{y}{x} = x^2 \left(\cos \frac{y}{x} + 1\right) + 1$. (D) $\cos \frac{y}{x} - 1 = x^2 \left(\cos \frac{y}{x} + 1\right)$.

Câu 8. Phương trình vi phân $xy' = y + x$ với điều kiện $y(1) = 2$ có nghiệm là

- (A) $y = x(\ln x + 2x)$. (B) $y = x \ln x + 2$. (C) $y = 2(\ln x + x)$. (D) $y = x(\ln x + 2)$.

Câu 9. Phương trình vi phân $xy' = 2y - 2\sqrt{xy}$ có nghiệm tổng quát là

- (A) $\sqrt{\frac{y}{x}} - 2 = C + \sqrt{x}$. (B) $\sqrt{\frac{y}{x}} + 2 = C - \sqrt{x}$.
 (C) $\sqrt{\frac{y}{x}} - 2 = C\sqrt{x}$. (D) $\sqrt{\frac{y}{x}} + 2 = C\sqrt{x}$.

Câu 10. Phương trình vi phân $(2xy + \sin y) dx + (x^2 + x \cos y) dy = 0$ có nghiệm tổng quát là

- (A) $x^2y + x \sin y = C$. (B) $x^2y + x \cos y = C$.
 (C) $2x^2y + x \sin y + xy = C$. (D) $x^2y + 2x \sin y = C$.

Câu 11. Phương trình vi phân $(e^{x+y} + 3x^2) dx + (e^{x+y} + 4y^3) dy = 0$ với điều kiện $y(0) = 0$ có nghiệm là

- (A) $y^3 + x^4 + e^{x+y} - 1 = 0$. (B) $y^4 + x^3 + e^{x+y} - 1 = 0$.
 (C) $y^3 - x^4 + e^{x+y} - 1 = 0$. (D) $y^4 - x^3 + e^{x+y} - 1 = 0$.

Câu 12. Phương trình vi phân $xy' - y = x^2 \cos x$ có nghiệm tổng quát là

- (A) $y = x \sin x - \frac{2 \sin x}{x^2} + C$. (B) $y = x \sin x - \frac{2 \sin x}{x^2} + Cx$.
 (C) $y = x \sin x + C$. (D) $y = x \sin x + Cx$.

Câu 13. Phương trình vi phân $4xy' + 3y = -e^x x^4 y^5$ có nghiệm tổng quát là

- (A) $y^4 = \frac{1}{x^3(C - e^{-x})}$. (B) $y^4 = \frac{1}{x^2(C - e^{-x})}$.
 (C) $y^4 = \frac{1}{x^3(C + e^x)}$. (D) $y^4 = \frac{1}{x^2(C + e^x)}$.

Câu 14. Phương trình vi phân $y' + \frac{4}{x}y = \frac{3}{x^4}$ với điều kiện $y(1) = 0$ có nghiệm là

Ⓐ $y = \frac{3(x-1)}{x^4}$. Ⓑ $y = \frac{3(1-x)}{x^4}$. Ⓒ $y = \frac{3(x-1)}{x^5}$. Ⓓ $y = \frac{3(1-x)}{x^5}$.

Câu 15. Phương trình vi phân $\sqrt{1-x^2}y' + y = \arcsin x$ với điều kiện $y(0) = 0$ có nghiệm là

Ⓐ $y = \arcsin x + e^{\arcsin x} - 1$. Ⓑ $y = \arcsin x + e^{-\arcsin x} - 1$.
 Ⓒ $y = \arcsin x - e^{\arcsin x} + 1$. Ⓓ $y = \arcsin x - e^{-\arcsin x} + 1$.

Câu 16. Phương trình vi phân $y'' - 4y' + 3y = 0$ có nghiệm tổng quát là

Ⓐ $y = C_1e^x + C_2e^{3x}$. Ⓑ $y = e^x (C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x)$.
 Ⓒ $y = e^{3x} (C_1 \cos x + C_2 \sin x)$. Ⓓ $y = C_1x^3 + C_2x$.

Câu 17. Phương trình vi phân $y'' + 2y' + 2y = 0$ có nghiệm tổng quát là

Ⓐ $y = e^x (C_1 \cos x + C_2 \sin x)$. Ⓑ $y = e^{-x} (C_1 \cos x + C_2 \sin x)$.
 Ⓒ $y = e^x (C_1 \cos(-x) + C_2 \sin(-x))$. Ⓓ $y = e^{-x} (C_1 \cos(2x) + C_2 \sin(2x))$.

Câu 18. Phương trình vi phân $y'' + 3y' = 0$ với điều kiện $y(0) = 1$ và $y'(0) = 2$ có nghiệm là

Ⓐ $y = \frac{1}{2} (5 - 3e^{3x})$. Ⓑ $y = \frac{1}{3} (5 - 2e^{3x})$. Ⓒ $y = \frac{1}{2} (5 - 3e^{-3x})$. Ⓓ $y = \frac{1}{3} (5 - 2e^{-3x})$.

Câu 19. Phương trình vi phân $y'' + 9y = 0$ với điều kiện $y\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0$ và $y'\left(\frac{\pi}{4}\right) = -1$ có nghiệm là

Ⓐ $y = \frac{\sqrt{2}}{6} (\cos 3x - \sin 3x)$. Ⓑ $y = \frac{\sqrt{2}}{6} (\cos 3x + \sin 3x)$.
 Ⓒ $y = \frac{6 - \sqrt{2}}{6} + \frac{\sqrt{2}}{6} \cos 3x$. Ⓓ $y = \frac{6 + \sqrt{2}}{6} - \frac{\sqrt{2}}{6} \cos 3x$.

Câu 20. Phương trình vi phân $y'' - 4y' + 3y = e^{5x}$ với điều kiện $y(0) = 3$ và $y'(0) = 9$ có nghiệm là

Ⓐ $y = e^{5x} + e^{3x} + e^x$. Ⓑ $y = 2e^{5x} + e^{3x} - e^x$.
 Ⓒ $y = \frac{1}{8} (e^{5x} + 22e^{3x} + e^x)$. Ⓓ $y = \frac{1}{2} (-e^{5x} + 5e^{3x} + 2e^x)$.

Câu 21. Phương trình vi phân $y'' - 6y' + 5 = 0$ có nghiệm tổng quát là

Ⓐ $y = C_1e^x + C_2e^{5x} - x$. Ⓑ $y = C_1e^x + C_2e^{5x} + x + 1$.
 Ⓒ $y = C_1 + C_2e^{6x} - \frac{5}{6}x$. Ⓓ $y = C_1 + C_2e^{6x} + \frac{5}{6}x$.

Câu 22. Phương trình vi phân $y'' + 4y + 4 = 0$ có nghiệm tổng quát là

Ⓐ $y = C_1 + C_2e^{-4x} - 1$. Ⓑ $y = C_1 + C_2 \cos 2x - 1$.
 Ⓒ $y = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x - 1$. Ⓓ $y = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x + 1$.

Câu 23. Phương trình vi phân $y'' + 2y' - 3y = e^x \cos x + 3xe^x \sin x$ có dạng nghiệm riêng là

Ⓐ $y^* = e^x [(Ax + B) \cos x + (Cx + D) \sin x]$. Ⓑ $y^* = xe^x [(Ax + B) \cos x + (Cx + D) \sin x]$.
 Ⓒ $y^* = e^x (A \cos x + B \sin x)$. Ⓓ $y^* = xe^x (A \cos x + B \sin x)$.

Câu 24. Phương trình vi phân $y'' - 2y' + 2y = e^x [(x^2 + 1) \cos x + x \sin x]$ có dạng nghiệm riêng là

Ⓐ $y^* = e^x [(Ax + B) \cos x + (Cx + D) \sin x]$.

Ⓑ $y^* = xe^x [(Ax + B) \cos x + (Cx + D) \sin x]$.

Ⓒ $y^* = e^x [(Ax^2 + Bx + C) \cos x + (Dx^2 + Ex + F) \sin x]$.

Ⓓ $y^* = xe^x [(Ax^2 + Bx + C) \cos x + (Dx^2 + Ex + F) \sin x]$.

Câu 25. Phương trình vi phân $y'' - 6y' + 25y = 2 \sin x + 3 \cos x$ có nghiệm tổng quát là

Ⓐ $y = e^{3x} (C_1 \cos 4x + C_2 \sin 4x) + \frac{1}{51} (14 \cos x + 5 \sin x)$.

Ⓑ $y = e^{3x} (C_1 \cos 4x + C_2 \sin 4x) + \frac{1}{102} (14 \cos x + 5 \sin x)$.

Ⓒ $y = e^{4x} (C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x) + \frac{1}{51} (14 \cos x + 5 \sin x)$.

Ⓓ $y = e^{4x} (C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x) + \frac{1}{102} (14 \cos x + 5 \sin x)$.

———— HẾT ————

ĐÁP ÁN CHƯƠNG 1

- | | | | | | | | | | |
|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| 1. A | 2. B | 3. B | 4. C | 5. A | 6. B | 7. D | 8. D | 9. B | 10. A |
| 11. C | 12. C | 13. D | 14. C | 15. A | 16. C | 17. B | 18. B | 19. A | 20. C |
| 21. B | 22. B | 23. C | 24. B | 25. D | 26. C | | | | |

ĐÁP ÁN CHƯƠNG 2

- | | | | | | | | | | |
|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| 1. B | 2. C | 3. A | 4. B | 5. A | 6. A | 7. A | 8. D | 9. A | 10. B |
| 11. D | 12. A | 13. A | 14. A | 15. A | 16. C | 17. A | 18. A | 19. C | 20. B |
| 21. A | 22. A | 23. D | 24. B | 25. A | | | | | |

ĐÁP ÁN CHƯƠNG 3

- | | | | | | | | | | |
|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| 1. B | 2. C | 3. D | 4. B | 5. D | 6. C | 7. A | 8. B | 9. C | 10. B |
| 11. B | 12. C | 13. A | 14. C | 15. D | 16. B | 17. C | 18. B | 19. C | 20. C |
| 21. D | 22. C | 23. A | 24. A | 25. A | | | | | |

ĐÁP ÁN CHƯƠNG 4

- | | | | | | | | | | |
|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| 1. B | 2. D | 3. A | 4. C | 5. C | 6. B | 7. D | 8. D | 9. D | 10. A |
| 11. B | 12. D | 13. C | 14. A | 15. B | 16. A | 17. B | 18. D | 19. B | 20. C |
| 21. D | 22. C | 23. A | 24. D | 25. B | | | | | |