

BÀI TẬP GIẢI TÍCH 1

Năm học 2021 - 2022

Chương 1. Giới hạn và liên tục

Bài 1. Tính giới hạn

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + 2x + 5} - x)$
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 - 5x - 1} - \sqrt{x^2 + 3x + 3})$
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{\cos x} - \sqrt[3]{\cos x}}{\sin^2 x}$
- $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{3}{1 - \sqrt{x}} - \frac{2}{1 - \sqrt[3]{x}} \right)$
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \left(\frac{1}{x-1} + \frac{1}{x+1} \right)$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x + \sqrt{x}}}{\sqrt{x+1}}$
- $\lim_{x \rightarrow \infty} x^2 \left(1 - \cos \frac{1}{x} \right)$
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+2x^2} - \cos x}{x^2}$
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{5} - \sqrt{4 + \cos x}}{x^2}$
- $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{2^x - x^2}{x - 2}$
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^3} - 1 + x^2}{x \tan x}$
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - \cos x}{\sqrt{1+2x} - 1}$
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{\sqrt[4]{1+4x^2} - 1}$
- $I = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 5x}{\ln(1 + x \sin x)}$
- $I = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt{\cos x} \cdot \sqrt{\cos 2x}}{\sin^2 x}$
- $\lim_{x \rightarrow 1} (1-x) \tan \frac{\pi x}{2}$
- $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x+1}{3x+2} \right)^{4x}$
- $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x^2+1}{3x^2+5} \right)^{2x^2+x}$
- $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x^2+1}{2x^2-5} \right)^{x^2}$
- $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+2}{x+1} \right)^{3x}$
- $\lim_{x \rightarrow 1} (1 + \sin \pi x)^{\cot \pi x}$
- $\lim_{x \rightarrow 0} (1 - 2x^2)^{\cot^2 x}$
- $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \sqrt{\cos \sqrt{x}}$

Bài 2. Vô cùng bé, vô cùng lớn

1. So sánh các VCB sau:

- $f(x) = 1 - \cos 2x$ và $g(x) = x$ khi $x \rightarrow 0$.
- $f(x) = \ln(1 + \sin x)$ và $g(x) = 2x$ khi $x \rightarrow 0$.
- $f(x) = \sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}$ và $g(x) = x^2$ khi $x \rightarrow 0$.
- $f(x) = x - 1$ và $g(x) = \cot \frac{\pi x}{2}$ khi $x \rightarrow 1$.
- $f(x) = 1 - \cos^2 x$ và $g(x) = \ln(1 + x^2)$ khi $x \rightarrow 0$.

(f) $f(x) = \sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}$ và $g(x) = \sin x$ khi $x \rightarrow 0$.

(g) $f(x) = \cos \frac{2}{x} - \cos \frac{1}{x}$ và $g(x) = \frac{1}{x}$ khi $x \rightarrow \infty$.

(h) $f(x) = x \cdot \cos \frac{1}{x}$ và $g(x) = x$ khi $x \rightarrow 0$.

2. So sánh các VCL $f(x) = e^x + e^{-x}$, $g(x) = e^x - e^{-x}$ khi

(a) $x \rightarrow +\infty$.

(b) $x \rightarrow -\infty$.

3. Tìm phần chính dạng Cx^α khi $x \rightarrow 0$ của VCB:

(a) $f(x) = \sqrt{1-2x} - 1 + x$.

(c) $f(x) = e^{x^2} - \cos x$.

(b) $f(x) = \tan x - \sin x$.

(d) $f(x) = \sqrt{3} - \sqrt{2 + \cos x}$.

Bài 3. Xét tính liên tục

1. $f(x) = \begin{cases} \frac{2x}{e^{2x} - e^{-x}} & \text{với } x \neq 0 \\ a & \text{với } x = 0 \end{cases}$

4. $f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{1+x} - 1}{x} & \text{nếu } x > 0 \\ a + 2 \cos x & \text{nếu } x \leq 0 \end{cases}$

2. $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 1}{x - 1} & \text{nếu } x \neq 1 \\ a & \text{nếu } x = 1 \end{cases}$

5. $f(x) = \begin{cases} (x^2 - 1) \sin \frac{\pi}{x-1} & \text{nếu } x \neq 1 \\ a & \text{nếu } x = 1 \end{cases}$

3. $f(x) = \begin{cases} \frac{1 - \cos \sqrt{x}}{x} & \text{nếu } x > 0 \\ a & \text{nếu } x \leq 0 \end{cases}$

6. $f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt[3]{1+2x} - 1}{x} & \text{nếu } x > 0 \\ a + x^2 & \text{nếu } x \leq 0 \end{cases}$

Chương 2. Đạo hàm và vi phân

Bài 1. Tính đạo hàm

1. Tính đạo hàm của các hàm số sau:

(a) $y(x) = x|x|$.

(b) $y(x) = |(x-1)^2(x+1)|$.

(c) $y(x) = |(x+1)^2(x+2)^3|$.

(d) $f(x) = \begin{cases} x(x+1)^2 & \text{với } x \geq 0, \\ -x(x+1)^2 & \text{với } x < 0. \end{cases}$

(e) $f(x) = \begin{cases} e^x & \text{với } x < 0, \\ 1+x & \text{với } x \geq 0. \end{cases}$

(f) $f(x) = \begin{cases} x^2 - 2x & \text{nếu } x < 2 \\ 2x - 4 & \text{nếu } x \geq 2 \end{cases}$

(g) $f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & \text{với } x \leq 2, \\ 9 - 2x & \text{với } x > 2. \end{cases}$

(h) $f(x) = \begin{cases} 2x^2 + 3x & \text{nếu } x \leq 0, \\ \ln(1+x) - x & \text{nếu } x > 0. \end{cases}$

(i) $f(x) = \begin{cases} 2^x - 1 & \text{nếu } x \leq 0, \\ \ln(1+x) & \text{nếu } x > 0. \end{cases}$

(j) $f(x) = \begin{cases} \arctan x - x & \text{nếu } x < 0, \\ x^2 + 2x & \text{nếu } x \geq 0. \end{cases}$

(k) $f(x) = \begin{cases} \arctan x & \text{với } x \geq 0 \\ x^2 + x & \text{với } x < 0 \end{cases}$

2. Tính $y'(0)$ bằng định nghĩa. Biết:

$$y = x(x-1)(x-2)\dots(x-2020)(x-2021)$$

3. Tính $f'_+(0), f'_-(0)$ của: $f(x) = \begin{cases} \frac{x}{1+e^{1/x}} & \text{nếu } x \neq 0 \\ 0 & \text{nếu } x = 0 \end{cases}$

4. Tính $y'(x), y''(x)$ của hàm số cho dưới dạng tham số:

$$\begin{array}{lll} \text{(a)} \begin{cases} x = e^t \cos 2t \\ y = e^t \sin 2t \end{cases} & \text{(c)} \begin{cases} x = a(t - \sin t) \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases} & \text{(e)} \begin{cases} x = t + e^t \\ y = t^2 + 2t^3 \end{cases} \\ \text{(b)} \begin{cases} x = a \cos^3 t \\ y = a \sin^3 t \end{cases} & \text{(d)} \begin{cases} x = 2e^t \cos t \\ y = 3e^t \sin t \end{cases} & \end{array}$$

Bài 2. Xét tính khả vi

1. $y = (x+2)|x-1|$.

2. $f(x) = \begin{cases} 1 - \cos x & \text{nếu } x \leq 0 \\ \ln(1+x) & \text{nếu } x > 0 \end{cases}$

3. $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{nếu } x \leq 0 \\ \ln(1+x) - x & \text{nếu } x > 0 \end{cases}$

4. $f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x+1}-1}{2} & \text{nếu } x > 0 \\ 0 & \text{nếu } x \leq 0 \end{cases}$

5. $f(x) = \begin{cases} \frac{x-1}{4}(x+1)^2 & \text{nếu } x \geq 1 \\ x-1 & \text{nếu } x < 1 \end{cases}$

6. Xét tính khả vi tại $x = 1$ của hàm số:

$$y(x) = \begin{cases} x^2 e^{1-x^2} & \text{nếu } x \leq 1 \\ \frac{1}{x} & \text{nếu } x > 1 \end{cases}$$

7. Xét tính khả vi tại $x = 0$ của hàm số:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \arctan \frac{1}{x} & \text{nếu } x \neq 0 \\ 0 & \text{nếu } x = 0 \end{cases}$$

8. Tìm a, b để hàm số sau khả vi trên \mathbb{R}

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 3x + 4 & \text{nếu } x < 2 \\ ax + b & \text{nếu } x \geq 2 \end{cases}$$

Bài 3. Đạo hàm cấp cao

1. Tính đạo hàm cấp n của hàm số

$$\text{(a)} f(x) = \frac{x-1}{x^2+5x+6}.$$

$$\text{(b)} f(x) = \frac{12x+7}{6x^2+7x+2}.$$

$$\text{(c)} f(x) = \frac{1+x}{1-x}.$$

$$\text{(d)} f(x) = \ln \sqrt[3]{1-4x}.$$

$$\text{(e)} f(x) = \cos^4 x + \sin^4 x.$$

$$\text{(f)} f(x) = e^{2x}(3x+5).$$

$$\text{(g)} f(x) = (2x+1) \sin x.$$

2. Cho hàm số $f(x) = \ln(1-3x)$. Tính $f^{(n)}(0)$.

3. Cho $y = \frac{x^4}{2-x}$. Tính $d^4 y$.

Bài 4. Các định lý giá trị trung bình và ứng dụng

1. Hàm số $f(x) = \sqrt[3]{x^2}$ có thoả mãn định lý Rolle trên $[-1; 1]$ không? Tại sao?
2. Cho $f(x) = (x - 1)(x - 2)(x - 3)(x - 4)$. Dùng định lý Rolle, chứng minh rằng phương trình $f'(x) = 0$ có 3 nghiệm thực phân biệt trên $[1, 4]$.
3. Kiểm tra các điều kiện của định lý Lagrange đối với hàm số sau trên $[0; 3]$

$$f(x) = \begin{cases} 4x + 1 & \text{nếu } 0 \leq x \leq 2 \\ x^2 + 5 & \text{nếu } 2 < x \leq 3 \end{cases}$$

Bài 5. Áp dụng quy tắc L'Hospital, tính giới hạn

1. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x) - x}{x^2}$
2. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1 - x}{x \cdot \sin x}$
3. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{4 \arctan(1+x) - \pi}{x}$
4. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctan x - x}{x^3}$
5. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - 1 - 2x}{2x^2}$
6. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+2x} - e^x}{x^2}$
7. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln^3 x}{x}$
8. $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin x}{x}\right)^{1/x^2}$
9. $\lim_{x \rightarrow 0^+} (\sin x)^{\tan 2x}$
10. $\lim_{x \rightarrow +\infty} x(\pi - 2 \arctan x)$
11. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{\sqrt{1+2x} - e^x}$
12. $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^2 \ln x$
13. $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(\frac{\pi}{4} - \arctan \frac{x}{x+1}\right)$
14. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{\sqrt[5]{1+5x} - (1+x)}$
15. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^{2017}}{e^x}$
16. $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x^2}\right)^{\sin x}$
17. $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{\sin^2 x}\right)$

Bài 6. Công thức Taylor và Maclaurin

1. Khai triển Maclaurin đến cấp n của $f(x) = \frac{x+1}{x^2-3x+2}$.
2. Khai triển Maclaurin đến cấp n của $f(x) = \ln \sqrt[5]{1+2x}$.
3. Khai triển Taylor đến cấp 3 hàm số $f(x) = \frac{x}{x-1}$ tại điểm $x_0 = 2$.

Chương 3. Hàm nhiều biến

Bài 1. Tính đạo hàm riêng

1. Cho $z = \sqrt[3]{xy}$, tính $z'_x(0,0), z'_y(0,0)$.
2. $z = \ln \frac{1}{x + \sqrt{x^2 + y^2}}$
3. $z = \ln \tan \frac{x}{y}$
4. $z = \arctan \frac{x+y}{x-y}$
5. $f(x,y) = e^{2x+y^3} + \sqrt{x^3 + y^2} + \sin(4x^2 + 5y)$.
6. $f(x,y) = \arctan \frac{x+y}{1-xy}$.
7. $f(x,y,z) = \arctan \frac{y}{xz}$
8. $f(x,y,z) = x^2 + 3y^2z + xz^3 + e^{xyz}$
9. $u = x^{y^2z}$
10. Cho $z = \ln(u^2 + v^2)$, $u = xy$, $v = e^{x+y}$. Tính $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$.
11. Cho $z = \ln(3x + 2y - 1)$, $x = e^t$, $y = \sin t$. Tính $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, \frac{dz}{dt}$.
12. Cho $u = \sin x + f(\sin y - \sin x)$, f là hàm khả vi. Chứng minh rằng:
$$\frac{\partial u}{\partial y} \cos x + \frac{\partial u}{\partial x} \cos y = \cos x \cos y.$$
13. Cho $z = f(xy + y^2)$, f là hàm khả vi. Rút gọn biểu thức $A = (x + 2y) \frac{\partial z}{\partial x} - y \frac{\partial z}{\partial y}$.
14. Cho $u = f\left(\frac{y}{x}, \frac{x}{z}\right)$, f là hàm khả vi. Rút gọn biểu thức $B = x \frac{\partial u}{\partial x} + y \frac{\partial u}{\partial y} + z \frac{\partial u}{\partial z}$.

Bài 2. Đạo hàm của hàm ẩn

1. Tính $y'(x)$ biết $y = y(x)$ hàm ẩn xác định hệ thức: $1 + xy - \ln(e^{xy} + e^{-xy}) = 0$.
2. Tính $y'(x), y''(x)$ biết $y = y(x)$ là hàm ẩn xác định bởi phương trình

$$\ln \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \arctan \frac{y}{x}$$

3. Tính $y'(x)$ của hàm ẩn xác định bởi phương trình $xe^y + ye^x = 1$ và từ đó tính $y'(0)$.
4. Tính z'_x, z'_y và dz biết $z = z(x, y)$ là hàm ẩn xác định bởi

(a) $xy^2z^3 + x^3y^2z = x + y + z.$

(e) $x^3 + y^3 + z^3 = 3xyz$

(b) $\arctan z + z^2 = e^{xy}$

(f) $2x + 3y + z = e^{xyz}.$

(c) $z - ye^{x/z} = 0$

(g) $xyz = \cos(x + y + z)$

(d) $\frac{x}{z} = \ln \frac{z}{y} + 1$

5. Tính $y'(x), z'(x)$ biết $y = y(x), z = z(x)$ xác định bởi $\begin{cases} x + 2y + 3z = 1 \\ x^2 + y^2 + z^3 = 4 \end{cases}$

6. Tính u'_x, u'_y biết $u = x^2 + y^2 + xyz$ và $z = z(x, y)$ xác định bởi $ze^z = ye^x + xe^y.$

Bài 3. Đạo hàm và vi phân cấp cao

1. Cho hàm số $u(x, y, z) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$. Hãy rút gọn biểu thức

$$A = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}.$$

2. Cho $u = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$. Chứng minh rằng: $u''_{x^2} + u''_{y^2} + u''_{z^2} = \frac{2}{u}$.

3. Tính $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \left(\frac{1}{2}, 1 \right)$ biết $u(x, y) = x + (y - 1) \arcsin \left(\sqrt{\frac{x}{y}} \right)$

4. Tính z''_{xy} biết hàm ẩn $z = z(x, y)$ xác định bởi $3x + 2y + z = e^{-x-y-z}$.

5. Tính các đạo hàm riêng cấp 1, cấp 2 của hàm số $f(x, y) = x \cos(3x + y^2) + e^{2x+3y}$.

6. Tính $d^2 f(1, 1)$, biết: $f(x, y) = x^2 + xy + y^2 - 4 \ln x - 2 \ln y$.

7. Tính $d^2 f(0, 1)$, biết: $f(x, y) = \arctan \frac{x}{y}$.

8. Tính các đạo hàm riêng cấp 1, cấp 2 và vi phân toàn phần của hàm số $f(x, y) = \ln \left(\sqrt{x^2 + y^2} \right) + 3 \arctan \frac{x}{y}$ tại điểm $(1, 2)$.

9. Tìm $d^2 z$ biết:

(a) $z = x^2 \ln(x + y)$

(b) $z = \arctan \frac{y}{x}$

Bài 4. Dùng vi phân tính gần đúng

1. $A = \sqrt{1,98^4 + 3,03^2}$

3. $C = \arctan \frac{1 + 0,02^3}{0,99^2}$

2. $B = \ln(\sqrt{1,03} + \sqrt[3]{0,99} - 1)$

4. $D = \sqrt{(1,04)^{1,99} + \ln(1,02)}$

Bài 5. Cực trị của hàm nhiều biến

1. Tìm cực trị các hàm sau:

- (a) $f(x, y) = x^2 + xy + y^2 - 2x - 3y$ (e) $f(x, y) = xy + \frac{8}{x} + \frac{1}{y}$
 (b) $f(x, y) = x^3 + y^3 - 15xy.$ (f) $f(x, y) = y\sqrt{x} - 2y^2 - x + 7y + 5.$
 (c) $f(x, y) = xy + 1000\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right)$ (g) $f(x, y) = x^2 + 4y^2 - 2\ln(xy).$
 (d) $f(x, y) = 2x^4 + y^4 - x^2 - 2y^2$ (h) $f(x, y) = x^3 + 3xy^2 - 15x - 12y.$
 (i) $f(x, y) = (x - y)(1 - xy).$

2. Tìm cực trị có điều kiện:

- (a) $f(x, y) = x + 2y$ với điều kiện $x^2 + y^2 = 5$
 (b) $f(x, y) = x^2 + y^2$ với điều kiện $\frac{x}{2} + \frac{y}{3} = 1$
 (c) $f(x, y) = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$ với điều kiện $\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} = 1$
 (d) $f(x, y) = xy$ với điều kiện $\frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{2} = 1$

3. Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất

- (a) $f(x, y) = x^2 + 3y^2 + x - y$, trên miền đóng D giới hạn bởi các đường $x = 1$, $y = 1$, $x + y = 1$.
 (b) $f(x, y) = xy$ trên miền $D = \left\{ \frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{2} \leq 1 \right\}$
 (c) $z = 1 + xy - x - y$, trên miền đóng D giới hạn bởi $y = x^2$ và $y = 1$