# SỐ GẦN ĐÚNG VÀ SAI SỐ

Nguyễn Thế Vinh,
Bộ môn Toán giải tích, Trường Đại học GTVT

Bài giảng dành cho SV các Khối Công trình, Cơ khí, KTXD

Hà Nội, Ngày 30 tháng 12 năm 2025

# Những khái niệm cơ bản

**Định nghĩa**

Độ sai lệch giữa giá trị gần đúng và giá trị chính xác được gọi là **sai số**.

**Định nghĩa**

Số $a$ được gọi là số gần đúng của số chính xác $A$, kí hiệu là

$$a \approx A$$

(đọc là $a$ xấp xỉ $A$), nếu $a$ khác $A$ không đáng kể và được dùng thay cho $A$ trong tính toán.

**Định nghĩa**

Đại lượng

$$\Delta = |a - A|$$

được gọi là **sai số thật sự** của số gần đúng $a$.

# Sai số tuyệt đối

**Định nghĩa**

Đại lượng

$$\Delta = |a - A|$$

được gọi là sai số thật sự của số gần đúng $a$.

Trong thực tế, do không biết số chính xác $A$, ta ước lượng một đại lượng dương $\Delta_a$ càng bé càng tốt thỏa điều kiện

$$|A - a| \leqslant \Delta_a, \tag{1}$$

được gọi là **sai số tuyệt đối** của số gần đúng $a$.

# Ý nghĩa ký hiệu $A = a \pm \Delta_a$

Trong thực tế đo lường, ta thường ký hiệu

$$A = a \pm \Delta_a,$$

trong đó:

- $A$ là **giá trị thật** (chưa biết chính xác) của đại lượng,
- $a$ là **giá trị đo được** hay giá trị gần đúng,
- $\Delta_a$ là **sai số tuyệt đối** của phép đo.

Ký hiệu $A = a \pm \Delta_a$ không phải là một phép toán, mà là cách viết tắt cho bất đẳng thức (1):

$$|A - a| \leq \Delta_a,$$

hay tương đương,

$$a - \Delta_a \leq A \leq a + \Delta_a.$$

Điều này có nghĩa là giá trị thật $A$ nằm trong một khoảng có tâm là $a$ và bán kính là $\Delta_a$.

# Ví dụ

Nếu ta viết

$$A = 2.8 \pm 0.014\ (\mathrm{m/s}),$$

thì điều đó có nghĩa là

$$2.786 \leq A \leq 2.814\ (\mathrm{m/s}).$$

Ta không biết chính xác giá trị thật $A$, nhưng biết chắc rằng nó nằm trong khoảng trên.

# Sai số tương đối

**Định nghĩa**

Sai số tương đối của số gần đúng $a$ so với số chính xác $A$ là đại lượng $\delta_a$ được tính theo công thức

$$\delta_a = \frac{|A-a|}{|A|}.$$

# Sai số tương đối

**Chú ý**

Trong nhiều trường hợp, nếu không biết $A$ ta có thể thay thế

$$\delta_a = \frac{\Delta_a}{|a|} 100\%.$$

# Ví dụ 1

Giả sử $A = \pi$, $a = 3.14$.

Do

$$3.13 = 3.14 - 0.01 < \pi < 3.14 + 0.01 = 3.15,$$

nên ta có thể chọn

$$\Delta_a = 0.01.$$

Mặt khác,

$$3.138 = 3.14 - 0.002 < \pi < 3.14 + 0.002 = 3.142,$$

do đó ta cũng có thể chọn

$$\Delta_a = 0.002.$$

Như vậy, với cùng một giá trị gần đúng, có thể có nhiều sai số tuyệt đối khác nhau. Trong trường hợp này ta chọn giá trị nhỏ nhất của chúng.

# Ví dụ 2

Vận tốc của một vật thể đo được là

$$v = 2.8\,\mathrm{m/s}$$

với sai số tương đối

$$\delta_v = 0.5\%.$$

Khi đó sai số tuyệt đối là

$$\Delta_v = v\delta_v = \frac{0.5}{100} \cdot 2.8\,\mathrm{m/s} = 0.014\,\mathrm{m/s}.$$

# Ví dụ 3

Ta đo độ dài hai đoạn thẳng và thu được các giá trị gần đúng

$$a = 10\,\mathrm{cm}, \qquad b = 1\,\mathrm{cm},$$

với cùng sai số tuyệt đối

$$\Delta_a = \Delta_b = 0.01\,\mathrm{cm}.$$

**Bước 1. Tính sai số tương đối**
Sai số tương đối được định nghĩa bởi

$$\delta = \frac{\Delta}{|a|}.$$

Do đó:

$$\delta_a = \frac{0.01}{10} = 0.001 = 0.1\%, \qquad \delta_b = \frac{0.01}{1} = 0.01 = 1\%.$$

Ta thấy

$$\delta_b = 10\,\delta_a.$$

# Ví dụ 3 (tiếp)

**Bước 2. Phân tích ý nghĩa**
Mặc dù hai phép đo có cùng sai số tuyệt đối

$$\Delta_a = \Delta_b,$$

nhưng ảnh hưởng của sai số này đối với kết quả đo là khác nhau:

- Với đoạn thẳng $a = 10\,\mathrm{cm}$, sai số $0.01\,\mathrm{cm}$ chỉ chiếm 0.1% giá trị đo.
- Với đoạn thẳng $b = 1\,\mathrm{cm}$, cùng sai số $0.01\,\mathrm{cm}$ lại chiếm tới 1% giá trị đo.

Điều này cho thấy kết quả đo $a$ bị "nhiễu" bởi sai số ít hơn so với kết quả đo $b$.

# Ví dụ 3 (tiếp)

**Kết luận**
Từ đó suy ra phép đo $a$ chính xác hơn phép đo $b$, mặc dù

$$\Delta_a = \Delta_b.$$

Như vậy, trong thực tế, **độ chính xác của một phép đo không được đánh giá bằng sai số tuyệt đối mà bằng sai số tương đối**.

Mọi số thực $a$ có thể được biểu diễn dưới dạng thập phân hữu hạn hoặc vô hạn

$$a = \pm(\alpha_m \alpha_{m-1} \dots \alpha_1 \alpha_0 \cdot \alpha_{-1} \alpha_{-2} \dots \alpha_{-n})$$

$$= \pm \sum_{k=-n}^{m} \alpha_k 10^k, \quad m, n \in \mathbb{N},\ m \geq 0,\ n \geq 1,\ \alpha_m \neq 0,$$

trong đó

$$\alpha_k \in \{0, 1, 2, \dots, 9\}.$$

# Chữ số có nghĩa

**Ví dụ 1.**

$$324.59 = 3 \times 10^2 + 2 \times 10^1 + 4 \times 10^0 + 5 \times 10^{-1} + 9 \times 10^{-2}.$$

Một số viết ở dạng thập phân có thể gồm nhiều chữ số. Ví dụ:

$$20.25 \text{ có 4 chữ số}, \qquad 0.03047 \text{ có 6 chữ số}.$$

# Chữ số có nghĩa

**Định nghĩa**

Những chữ số có nghĩa của một số là những chữ số của số đó kể từ chữ số khác không đầu tiên tính từ trái sang phải.

# Chữ số có nghĩa

**Ví dụ 2.**

Số 20.25 có 4 chữ số có nghĩa.

Số 0.03047 cũng có 4 chữ số có nghĩa.

# Làm tròn số

**Định nghĩa**

Làm tròn một số thập phân $a$ là bỏ một số các chữ số bên phải $a$ sau dấu chấm thập phân để được một số $a$ ngắn gọn hơn và gần đúng nhất so với $a$.

**Quy tắc.** Để làm tròn đến chữ số thứ $k$ sau dấu chấm thập phân, ta xét chữ số thứ $k+1$ sau dấu chấm thập phân là $\alpha_{k+1}$.

# Làm tròn số

**Định nghĩa**

Làm tròn một số thập phân $a$ là bỏ một số các chữ số bên phải $a$ sau dấu chấm thập phân để được một số $\widetilde{a}$ ngắn gọn hơn và gần đúng nhất so với $a$.

**Quy tắc.** Để làm tròn đến chữ số thứ $k$ sau dấu chấm thập phân, ta xét chữ số thứ $k+1$ là $\alpha_{k+1}$. Nếu $\alpha_{k+1} \geq 5$, ta tăng $\alpha_k$ lên 1 đơn vị.

# Làm tròn số

**Định nghĩa**

Làm tròn một số thập phân $a$ là bỏ một số các chữ số bên phải $a$ sau dấu chấm thập phân để được một số $a$ ngắn gọn hơn và gần đúng nhất so với $a$.

**Quy tắc.** Để làm tròn đến chữ số thứ $k$ sau dấu chấm thập phân, ta xét chữ số thứ $k+1$ là $\alpha_{k+1}$.

- Nếu $\alpha_{k+1} \geq 5$, ta tăng $\alpha_k$ lên 1 đơn vị;
- Nếu $\alpha_{k+1} < 5$, ta giữ nguyên chữ số $\alpha_k$.

Sau đó bỏ phần đuôi từ chữ số $\alpha_{k+1}$ trở đi.

# Ví dụ 3

Làm tròn số

$$\pi = 3.1415926535\ldots$$

đến chữ số thứ $4, 3, 2$ sau dấu chấm thập phân nhận được các số gần đúng lần lượt là

$$3.1416; \quad 3.142; \quad 3.14.$$

# Sai số làm tròn

**Định nghĩa**

Sai số thực sự của $\widetilde{a}$ so với $a$ được gọi là sai số làm tròn. Khi đó

$$\theta_{\widetilde{a}} = |a - \widetilde{a}|.$$

Giả sử giá trị đúng là $A$, đại lượng đo được là $a$ thỏa

$$|a - A| \leq \Delta_a.$$

Để tìm một sai số tuyệt đối $\Delta_{\widetilde{a}}$ của $\widetilde{a}$ so với $A$, ta xét:

$$\begin{aligned} |\widetilde{a} - A| &= |(\widetilde{a} - a) + (a - A)| \leq |\widetilde{a} - a| + |a - A| \\ &= \theta_{\widetilde{a}} + |a - A| \\ &\leq \theta_{\widetilde{a}} + \Delta_a =: \Delta_{\widetilde{a}}. \end{aligned}$$

Vì $\theta_{\widetilde{a}} \geq 0$ nên $\Delta_{\widetilde{a}} \geq \Delta_a$. Do đó sau khi làm tròn sai số tuyệt đối tăng lên. Vì vậy, khi tính toán ta tránh làm tròn các phép toán trung gian, chỉ nên làm tròn kết quả cuối cùng.

# Làm tròn trong bất đẳng thức

Trong trường hợp làm tròn số trong bất đẳng thức, ta sử dụng khái niệm làm tròn lên và làm tròn xuống.

Làm tròn lên hay làm tròn xuống cần lưu ý đến chiều bất đẳng thức.

# Ví dụ 4

$$a < 13.9236$$

khi làm tròn lên đến 2 chữ số lẻ sau dấu chấm thập phân ta được

$$a < 13.93.$$

$$b > 78.6789$$

khi làm tròn xuống đến 2 chữ số lẻ sau dấu chấm thập phân ta được

$$b > 78.67.$$

# Chữ số đáng tin

**Định nghĩa**

Cho $a \approx A$. Chữ số $\alpha_k$ trong phép biểu diễn dưới dạng thập phân được gọi là **đáng tin**, nếu

$$\Delta_a \le \frac{1}{2} \cdot 10^k.$$

Trong trường hợp ngược lại, chữ số $\alpha_k$ được gọi là **không đáng tin**.

# Ví dụ 5

Cho số gần đúng

$$a = 3.7284$$

với sai số tuyệt đối

$$\Delta_a = 0.0047.$$

Số $a$ có:

- 3 chữ số đáng tin là: $3, 7, 2$;
- 2 chữ số không đáng tin là: $8, 4$.

# Cách viết số gần đúng

Chúng ta viết số gần đúng $a$ của số chính xác $A$ với sai số tuyệt đối $\Delta_a$ theo các quy tắc sau:

- Viết số gần đúng kèm theo sai số tuyệt đối dưới dạng
$$a \pm \Delta_a.$$
Ví dụ: $17.358 \pm 0.003$. Cách này thường dùng để biểu diễn kết quả tính toán hoặc phép đo.
- Viết số gần đúng theo quy ước: mọi chữ số có nghĩa đều đáng tin. Điều này có nghĩa là sai số tuyệt đối $\Delta_a$ không lớn hơn một nửa đơn vị của chữ số cuối cùng bên phải.

# Ví dụ minh họa cho cách viết thứ 2

Với $a = 23.54$ thì sai số tuyệt đối

$$\Delta_a \leq \frac{1}{2} \cdot 10^{-2} = 0.005.$$

Trong khi nếu viết

$$a = 23.5400$$

thì sai số tuyệt đối

$$\Delta_a \leq \frac{1}{2} \cdot 10^{-4} = 0.00005.$$

Cách này thường dùng để trình bày các bảng số. Mặc dù trong $\mathbb{R}$: $23.54 = 23.5400$ (cùng giá trị số học), nhưng sự khác nhau ở 2 cách viết trên không nằm ở giá trị số học mà nằm ở **mức sai số được ngầm hiểu**.

# Ước lượng sai số dựa trên xấp xỉ tuyến tính

**Mệnh đề (Công thức Taylor bậc nhất).** Giả sử $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ thuộc lớp $C^2$ trong một lân cận của điểm $x = (x_1, \ldots, x_n)$. Khi đó, với $X$ đủ gần $x$, ta có

$$f(X) = f(x) + \nabla f(x) \cdot (X - x) + R_2(X),$$

trong đó phần dư $R_2(X)$ thỏa mãn

$$|R_2(X)| = O\big(\|X - x\|^2\big).$$

Do đó,

$$f(X) - f(x) \approx \nabla f(x) \cdot (X - x).$$

# Công thức xấp xỉ của sai số

Cho hàm số $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ khả vi liên tục

$$y = f(x_1, x_2, \ldots, x_n),$$

và giả sử biết các sai số tuyệt đối $\Delta_{x_i}$ của các đối số $x_i$ $(i = \overline{1..n})$.

Ký hiệu $X_i$, $Y$ và $x_i$, $y$ $(i = \overline{1..n})$ lần lượt là các giá trị chính xác và gần đúng của các đối số và của hàm số.

# Công thức xấp xỉ tuyến tính của sai số

Giả sử $f \in C^2$ trong một lân cận của điểm $x = (x_1, \dots, x_n)$. Khi các sai lệch $|X_i - x_i|$ đủ nhỏ, khai triển Taylor bậc nhất cho ta

$$f(X_1, \dots, X_n) - f(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x)\,(X_i - x_i) + R_2,$$

trong đó phần dư $R_2 = O(\|X - x\|^2)$.

Bỏ qua các hạng bậc hai và cao hơn, ta có xấp xỉ

$$Y - y \approx \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x)\,(X_i - x_i). \tag{2}$$

# Công thức xấp xỉ của sai số tuyệt đối

Vì $|X_i - x_i| \leq \Delta_{x_i}$ nên từ (2) ta suy ra

$$\begin{aligned} |Y - y| \approx \left| \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x)\,(X_i - x_i) \right| &\leq \sum_{i=1}^{n} \left| \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) \right| |X_i - x_i| \\ &\leq \sum_{i=1}^{n} \left| \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) \right| \Delta_{x_i}. \end{aligned}$$

Do đó sai số tuyệt đối của $y$ được xấp xỉ bởi

$$\Delta_y \approx \sum_{i=1}^{n} \left| \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) \right| \Delta_{x_i}. \tag{3}$$

# Sai số tương đối

Sai số tương đối của hàm số $y$ là

$$\delta_y = \frac{\Delta_y}{|y|} = \frac{\sum_{i=1}^{n} \left| \frac{\partial f}{\partial x_i} \right| \cdot \Delta_{x_i}}{|f|}$$
$$= \sum_{i=1}^{n} \left| \frac{\partial}{\partial x_i} \ln f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \right| \cdot \Delta_{x_i}. \tag{4}$$

# Ví dụ 6

Tính sai số tuyệt đối và sai số tương đối của thể tích hình cầu

$$V = \frac{1}{6}\pi d^3,$$

biết

$$d = 3.70\,\mathrm{cm} \pm 0.05\,\mathrm{cm}, \qquad \pi = 3.14 \pm 0.0016.$$

# Ví dụ 6 (tiếp)

Xét hàm với đối số $\pi$ và $d$ như sau:

$$V(\pi, d) = \frac{1}{6}\pi d^3.$$

Ta chọn điểm

$$(\pi_0, d_0) = (3.14,\ 3.70).$$

Để tiện cho người đọc, chúng tôi nhắc lại khai triển Taylor bậc nhất của $V$ quanh $(\pi_0, d_0)$ (xem (2)):

$$V(\pi, d) - V(\pi_0, d_0) \approx \frac{\partial V}{\partial \pi}(\pi_0, d_0)(\pi - \pi_0) + \frac{\partial V}{\partial d}(\pi_0, d_0)(d - d_0).$$

Do đó sai số tuyệt đối của $V$ được xấp xỉ bởi (xem (3))

$$\Delta_V \approx \left|\frac{\partial V}{\partial \pi}(\pi_0, d_0)\right| \Delta_\pi + \left|\frac{\partial V}{\partial d}(\pi_0, d_0)\right| \Delta_d.$$

# Ví dụ 6 (tiếp)

Ta có

$$\frac{\partial V}{\partial \pi} = \frac{1}{6} d^3, \qquad \frac{\partial V}{\partial d} = \frac{1}{2}\pi d^2.$$

Vì vậy

$$\begin{aligned}\Delta_V &\approx \left|\frac{\partial V}{\partial \pi}(\pi_0, d_0)\right| \Delta_\pi + \left|\frac{\partial V}{\partial d}(\pi_0, d_0)\right| \Delta_d \\ &= \frac{1}{6}(3.70)^3 \cdot 0.0016 + \frac{1}{2}(3.14)(3.70)^2 \cdot 0.05 \\ &= 1.0882.\end{aligned}$$

Do đó

$$V = 26.5084\,\mathrm{cm}^3 \pm 1.0882\,\mathrm{cm}^3, \qquad \delta_V = \frac{1.0882}{26.5084} = 0.0411.$$

# Sai số của tổng đại số

Xét hàm số

$$y = \pm x_1 \pm x_2 \pm \cdots \pm x_n.$$

Khi đó

$$\left|\frac{\partial y}{\partial x_i}\right| = 1, \quad (i = \overline{1..n}).$$

Thay vào công thức (3) ta có sai số tuyệt đối:

$$\Delta_y = \sum_{i=1}^{n} \left|\frac{\partial}{\partial x_i} y(x_1, x_2, \ldots, x_n)\right| \cdot \Delta_{x_i} = \Delta_{x_1} + \Delta_{x_2} + \cdots + \Delta_{x_n}.$$

Và vì vậy suy ra sai số tương đối:

$$\delta_y = \frac{\Delta_y}{|y|}.$$

# Ví dụ 7

Tính sai số tuyệt đối và sai số tương đối của

$$y = a + b + c$$

với

$$a = 47.132 \pm 0.003, \quad b = 47.111 \pm 0.02, \quad c = 45.234 \pm 0.5.$$

$$\Delta_y = 0.003 + 0.02 + 0.5 = 0.523.$$

$$Y = 139.477 \pm 0.523, \qquad \delta_y = \frac{0.523}{139.477} = 0.0037.$$

# Sai số của tích

Xét hàm số

$$y = x_1 x_2 \cdots x_n.$$

Khi đó

$$\left|\frac{\partial}{\partial x_i}\ln y\right| = \frac{1}{|x_i|}, \quad (i = \overline{1..n}).$$

Thay vào công thức (4) ta có sai số tương đối:

$$\delta_y = \sum_{i=1}^{n}\left|\frac{\partial}{\partial x_i}\ln y(x_1, x_2, \ldots, x_n)\right| \cdot \Delta_{x_i} = \delta_{x_1} + \delta_{x_2} + \cdots + \delta_{x_n}.$$

Và vì vậy suy ra sai số tuyệt đối:

$$\Delta_y = \delta_y \cdot |y|.$$

# Ví dụ 8

Tính sai số tuyệt đối và sai số tương đối của

$$y = a \cdot b \cdot c$$

với

$$a = 47.132 \pm 0.003, \quad b = 47.111 \pm 0.02, \quad c = 45.234 \pm 0.5.$$

$$\delta_y = \frac{0.003}{47.132} + \frac{0.02}{47.111} + \frac{0.5}{45.234} = 0.0115.$$

# Ví dụ 8 (tiếp)

$$\Delta_y = \delta_y \cdot |y|$$
$$= \left(\frac{0.003}{47.132} + \frac{0.02}{47.111} + \frac{0.5}{45.234}\right)(47.132 \times 47.111 \times 45.234)$$
$$= 1159.2503.$$

# Bài 1

Biết $A$ có giá trị gần đúng là

$$a = 3.5833$$

với sai số tương đối

$$\delta_a = 0.28\%.$$

Ta làm tròn $a$ thành

$$a^* = 3.58.$$

Tính sai số tuyệt đối của $a^*$.

# Bài 1 – Giải

Ta có

$$\Delta_{a^*} = \Delta_a + |a - a^*| = |a|\delta_a + |a - a^*|.$$

Thay số:

$$\Delta_{a^*} = 0.0134.$$

# Bài 2

Làm tròn đến hai chữ số lẻ sau dấu chấm thập phân của các số sau:

$$a = 12.6724, \quad b = 1.5476, \quad c \leq 12.8713, \quad d \geq 1.2354.$$

# Bài 2 – Giải

- $a = 12.6724 \Rightarrow a \approx 12.67.$
- $b = 1.5476 \Rightarrow b \approx 1.55.$
- $c \leq 12.8713 \Rightarrow c \leq 12.88.$
- $d \geq 1.2354 \Rightarrow d \geq 1.23.$

# Bài 3

Cho

$$a = 7.1696$$

với sai số tương đối

$$\delta_a = 0.83\%.$$

Tìm số chữ số đáng tin trong cách viết thập phân của $a$.

# Bài 3 – Giải

Chữ số đáng tin ở vị trí $k$ thỏa:

$$\Delta_a \leq \frac{1}{2}10^k.$$

Suy ra

$$k \geq \log(2\Delta_a) = \log\left(2|a|\delta_a\right) = -0.92.$$

Do đó

$$k_{\min} = 0.$$

Có một chữ số đáng tin.

# Bài 4

Cho biểu thức

$$f = x^3 + xy + y^3.$$

Biết

$$x = 1.9501 \pm 0.0050, \qquad y = 3.4740 \pm 0.0083.$$

Tính sai số tuyệt đối của $f$.

# Bài 4 – Giải

$$\Delta_f = |f'_x|\,\Delta_x + \left|f'_y\right|\Delta_y$$

$$= |3x^2 + y|\Delta_x + |x + 3y^2|\Delta_y$$

$$= |3 \cdot 1.9501^2 + 3.4740| \cdot 0.0050 + |1.9501 + 3 \cdot 3.4740^2| \cdot 0.0083 = 0.3912.$$

# Bài 5

Cho

$$a = 15.00 \pm 0.02, \quad b = 0.123 \pm 0.001, \quad c = 137 \pm 0.5.$$

Hãy tính sai số tuyệt đối của:

- $A = a + b + c$,
- $B = 20a - 100b + c$,
- $C = a + bc$.

# Bài 5 – Giải

- $A = a + b + c \Rightarrow \Delta_A = \Delta_a + \Delta_b + \Delta_c = 0.521.$
- $B = 20a - 100b + c \Rightarrow \Delta_B = 20\Delta_a + 100\Delta_b + \Delta_c = 1.$
- $C = a + bc \Rightarrow \Delta_C = \Delta_a + |c|\Delta_b + |b|\Delta_c = 0.2185.$

# Bài 6

Cho hàm số

$$f(x) = 3x^5 - 2x^2 + 7$$

và

$$x = 1.234 \pm 0.00015.$$

Tính $\Delta_f$.

# Bài 6 – Giải

Ta có

$$f'(x) = 15x^4 - 4x.$$

Do đó

$$\Delta_f = |f'(x)| \cdot \Delta_x.$$

Thay số:

$$\Delta_f = \left|15(1.234)^4 - 4 \cdot 1.234\right| \cdot 0.00015 = 0.0045.$$