PGS.TS. NGUYỄN PHỤ HY
HOÀNG NGỌC TUẤN
NGUYỄN VĂN TUYÊN

BÀI TẬP GIẢI TÍCH HÀM

(Tái bản có sửa chữa)

NHÀ XUẤT BẢN KHOA HỌC VÀ KỸ THUẬT
HÀ NỘI – 2009

Lời nói đầu

Trong chương trình đào tạo cử nhân ngành toán, giải tích hàm là một môn học khó đối với cả người dạy lẫn người học. Cùng với cuốn "*Giải tích hàm*" của PGS.TS. Nguyễn Phụ Hy, chúng tôi biên soạn cuốn "*Bài tập giải tích hàm*" nhằm tạo điều kiện thuận lợi cho bạn đọc khi học tập lý thuyết kể trên.

Cuốn sách chỉ đề cập tới những kiến thức cần thiết, không thể thiếu được về giải tích hàm và phù hợp với chương trình đào tạo hiện hành.

Cuốn sách được cấu trúc thành 4 chương:

- Chương 1. Không gian metric.
- Chương 2. Không gian định chuẩn.
- Chương 3. Không gian Hilbert.
- Chương 4. Phổ của toán tử tuyến tính bị chặn.

Nội dung mỗi chương bao gồm:

- Tóm tắt lý thuyết.
- Đề bài tập.
- Bài tập nâng cao.
- Hướng dẫn giải.

Các tác giả mong muốn nhận được những ý kiến đóng góp quý báu của các bạn đọc để cuốn sách ngày càng hoàn thiện trong những lần tái bản.

Tác giả chân thành cảm ơn Nhà xuất bản Khoa học và Kỹ thuật đã nhiệt tình giúp đỡ để cuốn sách sớm được xuất bản và đến tay bạn đọc.

Hà Nội, tháng 9 năm 2007
Các tác giả

Mục lục

Chương 1

Không gian metric

1.1 Tóm tắt lý thuyết

1.1.1 Kiến thức mở đầu về không gian metric

1. Định nghĩa không gian metric

Định nghĩa 1.1.1. *Không gian metric là một tập hợp $X \neq \emptyset$ cùng với một ánh xạ d từ tích Descartes $X \times X$ vào tập hợp số thực $\mathbb{R}$ thỏa mãn các tiên đề sau đây:*

1) $(\forall x, y \in X)\ d(x,y) \geq 0, d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$ *(tiên đề đồng nhất);*

2) $(\forall x, y \in X)\ d(x,y) = d(y,x)$ *(tiên đề đối xứng);*

3) $(\forall x, y, z \in X)\ d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$ *(tiên đề tam giác).*

Ánh xạ d được gọi là metric trên X, $d(x,y)$ gọi là khoảng cách giữa hai phần tử x và y, các phần tử của X gọi là các điểm, các tiên đề 1), 2), 3) gọi là hệ tiên đề metric. Không gian metric được kí hiệu là $M = (X, d)$.

Định nghĩa 1.1.2. *Cho không gian metric $M = (X, d)$. Một tập hợp con bất kì $X_0 \neq \emptyset$ của tập hợp X cùng với metric d trên X gọi là không gian metric con của không gian đã cho.*

2. Sự hội tụ trong không gian metric

Định nghĩa 1.1.3. *Cho không gian metric $M = (X, d)$. Dãy điểm $(x_n) \subset X$ được gọi là hội tụ tới điểm $x \in X$ khi $n \to \infty$, nếu*

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N}^*)(\forall n \geq n_0)\ d(x_n, x) < \varepsilon$$

và kí hiệu:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x \quad hay \quad x_n \to x\ (n \to \infty).$$

Điểm x còn gọi là giới hạn của dãy điểm (x_n) trong không gian M.

Nhận xét: Nếu hai dãy điểm $(x_n), (y_n)$ hội tụ tương ứng tới x và y khi $n \to \infty$ thì

$$\lim_{n\to\infty} d(x_n, y_n) = d(x, y).$$

3. Các không gian metric đẳng cự

Định nghĩa 1.1.4. *Cho hai không gian metric $M_1 = (X, d_1)$, $M_2 = (Y, d_2)$. Ánh xạ A từ không gian M_1 vào không gian M_2 gọi là đẳng cự, nếu*

$$(\forall x, x' \in X)\ d_2(Ax, Ax') = d_1(x, x').$$

Định nghĩa 1.1.5. *Hai không gian metric $M_1 = (X, d_1)$, $M_2 = (Y, d_2)$ gọi là đẳng cự, nếu tồn tại một ánh xạ đẳng cự từ M_1 lên M_2.*

Hai không gian metric đẳng cự được coi là như nhau.

1.1.2 Tôpô trong không gian metric

1. Lân cận

Định nghĩa 1.1.6. *Cho không gian metric $M = (X, d)$, $a \in X$ và số $r > 0$. Ta gọi:*

- *Tập hợp $S(a, r) = \{x \in X : d(x, a) < r\}$ là hình cầu mở tâm a, bán kính r;*
- *Tập hợp $S'(a, r) = \{x \in X : d(x, a) \leq r\}$ là hình cầu đóng tâm a, bán kính r.*

Định nghĩa 1.1.7. *Cho không gian metric $M = (X, d)$. Mọi hình cầu mở tâm x bán kính $r > 0$ gọi là lân cận của điểm $x \in X$ trong không gian M.*

2. Tập hợp mở và tập hợp đóng

Định nghĩa 1.1.8. *Cho không gian metric $M = (X, d)$ và tập hợp $A \subset X$.*

- *Tập hợp A gọi là mở trong không gian M, nếu*

$$(\forall x \in A)(\exists S(x, r) \subset A);$$

- *Tập hợp A gọi là đóng trong không gian M, nếu*

$$(\forall x \notin A)(\exists S(x, r) \cap A = \emptyset).$$

Định lí 1.1.1. *Trong không gian metric bất kì, mọi hình cầu mở là tập hợp mở, mọi hình cầu đóng bất kì là tập hợp đóng.*

Định lí 1.1.2. *Cho không gian metric $M = (X, d)$ và tập hợp $A \subset X$, $A \neq \emptyset$, tập hợp A đóng trong không gian M khi và chỉ khi mọi dãy điểm $(x_n) \subset A$ hội tụ tới điểm x thì $x \in A$.*

Từ định nghĩa và định lý trên dễ dàng suy ra: Trong không gian metric $M = (X, d)$ phần bù của tập hợp mở là tập hợp đóng, còn phần bù của tập hợp đóng là tập hợp mở; các tập hợp X và $\emptyset$ là hai tập hợp vừa đóng vừa mở.

Định lí 1.1.3. *Trong không gian metric* $\mathbb{R}^1$ *(tập hợp số thực với metric thông thường), tập hợp mở khác rỗng bất kì là hợp của một họ hữu hạn hay đếm được khoảng đôi một không giao nhau; tập hợp đóng bất kì là phần còn lại sau khi gạch bỏ một số hữu hạn hay đếm được khoảng đôi một không giao nhau.*

3. Phần trong và bao đóng của một tập hợp

Định nghĩa 1.1.9. *Cho không gian metric* $M = (X, d)$ *và tập hợp* $A \subset X$. *Hợp của tất cả tập hợp mở chứa trong* A *gọi là phần trong của tập hợp* A *và kí hiệu* $\operatorname{int} A$ *hay* $\mathring{A}$. *Giao của tất cả tập hợp đóng chứa* A *gọi là bao đóng của tập hợp* A *và kí hiệu* $[A]$ *hay* $\overline{A}$.

Một số tính chất thường sử dụng:

1) $\operatorname{int} \emptyset = \emptyset$, $\overline{\emptyset} = \emptyset$;
2) $\operatorname{int} X = X$, $\overline{X} = X$;
3) $(A \subset B \subset X) \Rightarrow \operatorname{int} A \subset \operatorname{int} B$, $\overline{A} \subset \overline{B}$;
4) $(A \subset X, B \subset X)$ $\operatorname{int}(A \cap B) = (\operatorname{int} A) \cap (\operatorname{int} B)$, $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$;
5) $(A \subset X)$ A là tập hợp mở khi và chỉ khi $\operatorname{int} A = A$, còn A là tập hợp đóng khi và chỉ khi $\overline{A} = A$;
6) $(A \subset X)$ $\operatorname{int} A = X \backslash (\overline{X \backslash A})$.

4. Tôpô trong không gian metric

Định lí 1.1.4. *Trong không gian metric bất kì $M = (X, d)$ họ tất cả tập hợp mở lập thành một tôpô trên X. Tôpô đó gọi là tôpô sinh bởi metric d.*

Từ định lý trên, dễ dàng suy ra: Trong không gian metric bất kì, giao của một họ tùy ý tập hợp đóng là tập hợp đóng, hợp một họ hữu hạn tùy ý tập hợp đóng là tập hợp đóng.

Định lí 1.1.5. *Trong không gian metric bất kì, tôpô sinh bởi metric là tôpô có cơ sở lân cận đếm được.*

5. Hai metric tương đương

Định nghĩa 1.1.10. *Cho hai metric d_1, d_2 trên cùng tập hợp $X \neq \emptyset$ nào đấy. Hai metric d_1, d_2 gọi là tương đương, nếu $\exists \alpha > 0, \exists \beta > 0$ sao cho*

$$(\forall x, y \in X)\ \alpha.d_1(x, y) \leq d_2(x, y) \leq \beta.d_1(x, y).$$

Định lí 1.1.6. *Nếu hai metric d_1, d_2 cho trên cùng tập hợp $X \neq \emptyset$ là tương đương, thì hai tôpô tương ứng sinh bởi hai metric d_1, d_2 trùng nhau.*

1.1.3 Ánh xạ liên tục

Định nghĩa 1.1.11. *Cho hai không gian metric $M_1 = (X, d_1), M_2 = (Y, d_2)$, ánh xạ f từ không gian M_1 đến không gian M_2. Ánh xạ f gọi là liên tục tại điểm $x_0 \in X$, nếu*

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in X : d_1(x, x_0) < \delta)\ d_2(f(x), f(x_0)) < \varepsilon.$$

Hay phát biểu cách khác:

Ánh xạ f gọi là liên tục tại điểm $x_0 \in X$, nếu với lân cận cho trước tùy ý $U_{y_0} = S(y_0, \varepsilon) \subset Y$ của điểm $y_0 = f(x_0)$ trong không gian M_2 ắt tìm được lân cận $V_{x_0} = S(x_0, \delta) \subset X$ của điểm x_0 trong không gian M_1 sao cho $f(V_{x_0}) \subset U_{y_0}$.

Định nghĩa trên tương đương với định nghĩa sau:

Ánh xạ f gọi là liên tục tại điểm $x_0 \in X$, nếu với mọi dãy điểm $(x_n) \subset X$ hội tụ tới điểm x_0 trong không gian M_1, dãy điểm $(f(x_n))$ hội tụ tới điểm $f(x_0)$ trong không gian M_2.

Định nghĩa 1.1.12. *Ánh xạ f từ không gian metric M_1 đến không gian metric M_2 gọi là liên tục trên tập hợp $A \subset X$, nếu ánh xạ f liên tục tại mọi điểm $x \in A$. Khi $X = A$ thì ánh xạ f gọi là liên tục.*

Định nghĩa 1.1.13. *Ánh xạ f từ không gian metric M_1 đến không gian metric M_2 gọi là liên tục đều trên tập hợp $A \subset X$, nếu*

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x', x'' \in A : d_1(x', x'') < \delta)\; d_2(f(x'), f(x'')) < \varepsilon.$$

Định lí 1.1.7. *Cho ánh xạ f từ không gian metric M_1 đến không gian metric M_2. Năm mệnh đề sau đây tương đương:*

1) *f liên tục;*

2) *Tạo ảnh của tập hợp đóng bất kì trong M_2 là tập hợp đóng trong M_1;*

3) *Tạo ảnh của tập hợp mở bất kì trong M_2 là tập hợp mở trong M_1;*

4) *Với mọi tập hợp $A \subset X$ đều có $f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}$;*

5) *Với mọi tập hợp $B \subset Y$ đều có $f^{-1}(\operatorname{int} B) \subset \operatorname{int} f^{-1}(B)$.*

1.1.4 Không gian metric đầy

1. Định nghĩa

Định nghĩa 1.1.14. *Cho không gian metric $M = (X, d)$. Dãy điểm $(x_n) \subset X$ gọi là dãy cơ bản trong không gian M, nếu*

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N}^*)(\forall n, m \geq n_0)\ d(x_n, x_m) < \varepsilon$$

hay $\lim\limits_{n,m\to\infty} d(x_n, x_m) = 0.$

Định nghĩa 1.1.15. *Không gian metric $M = (X, d)$ gọi là không gian đầy, nếu mọi dãy cơ bản trong không gian này đều hội tụ.*

2. Một số nguyên lý cơ bản về không gian đầy

a. Nguyên lý Cantor về dãy hình cầu thắt dần

Định nghĩa 1.1.16. *Cho không gian metric $M = (X, d)$. Dãy hình cầu (S_n), S_n có tâm a_n và bán kính r_n trong không gian M, gọi là thắt dần, nếu $S_n \supset S_{n+1}$ $(n = 1, 2, \ldots)$ và $\lim\limits_{n\to\infty} r_n = 0$.*

Định lí 1.1.8. ***Nguyên lý Cantor về dãy hình cầu thắt dần***

Không gian metric $M = (X, d)$ là không gian đầy khi và chỉ khi mọi dãy hình cầu đóng thắt dần đều có điểm chung duy nhất.

b. Nguyên lý Banach về ánh xạ co

Định nghĩa 1.1.17. *Cho hai không gian metric $M_1 = (X, d_1)$, $M_2 = (Y, d_2)$, ánh xạ A từ không gian M_1 đến không gian M_2. Ánh xạ A gọi là ánh xạ co, nếu*

$$(\exists \alpha \in [0, 1))(\forall x', x'' \in X)\ d_2(Ax', Ax'') \leq \alpha d_1(x', x'').$$

Định lí 1.1.9. ***Nguyên lý Banach về ánh xạ co***

Mọi ánh xạ co A ánh xạ không gian metric đầy $M = (X, d)$ vào chính nó đều tồn tại duy nhất điểm $x^* \in X$ sao cho $Ax^* = x^*$.

Điểm x^* gọi là điểm bất động của ánh xạ A.

c. Nguyên lý phạm trù

Định nghĩa 1.1.18. *Cho không gian metric $M = (X, d)$, tập hợp $E \subset X$. Tập hợp E gọi là không đâu trù mật trong không gian M, nếu hình cầu bất kì $S \subset X$ đều chứa một hình cầu S_1 sao cho $S_1 \cap E = \emptyset$.*

Định nghĩa 1.1.19. *Cho không gian metric $M = (X, d)$, tập hợp $F \subset X$. Tập hợp F gọi là tập hợp phạm trù thứ nhất, nếu tập hợp F là hợp đếm được các tập hợp không đâu trù mật trong không gian M. Tập hợp con của X không là tập hợp phạm trù thứ nhất thì gọi là tập hợp phạm trù thứ hai.*

Định lí 1.1.10. ***Nguyên lý phạm trù Baire***

Mọi không gian metric đầy là tập hợp phạm trù thứ hai.

d. Nguyên lý thác triển liên tục

Định nghĩa 1.1.20. *Cho ánh xạ f ánh xạ không gian metric $M_1 = (X, d_1)$ vào không gian metric $M_2 = (Y, d_2)$, tập hợp $A \subset X$. Khi xem A như là không gian metric con của M_1 và ánh xạ f chỉ xét ánh xạ A vào M_2, thì ta gọi ánh xạ đó là cái hạn chế của f trên A và kí hiệu $f\,|_A$, còn ánh xạ f gọi là cái thác triển của $f\,|_A$ từ A lên toàn bộ M_1.*

Định nghĩa 1.1.21. *Cho không gian metric $M = (X, d)$ và hai tập hợp con khác rỗng A, B của X. Tập hợp A được gọi là trù mật trong tập hợp B, nếu*

$$(\forall x \in B)(\forall \varepsilon > 0)(\exists y \in A)\; d(y, x) < \varepsilon.$$

Khi $B = X$ thì tập hợp A gọi là trù mật khắp nơi trong M (hay trong X).

Định lí 1.1.11. ***Nguyên lý thác triển liên tục***

Cho không gian metric $M_1 = (X, d_1)$, không gian metric đầy $M_2 = (Y, d_2)$, tập hợp A trù mật khắp nơi trong X. Nếu ánh xạ f ánh xạ tập hợp A vào không gian M_2 và liên tục đều trên A, thì tồn tại duy nhất một ánh xạ liên tục đều G từ toàn bộ M_1 vào M_2 sao cho $(\forall x \in A)\ G(x) = f(x)$. Ánh xạ G gọi là thác triển liên tục của ánh xạ f từ A lên toàn bộ M_1.

e. Nguyên lý làm đầy không gian metric

Định lí 1.1.12. ***Nguyên lý làm đầy không gian metric***

Cho không gian metric $M = (X, d)$ (nói chung M là không gian không đầy). Khi đó tồn tại không gian metric đầy $\widetilde{M}$ sao cho:

1) Không gian M đẳng cự với một không gian con của $\widetilde{M}$;

2) M trù mật khắp nơi trong $\widetilde{M}$.

Hai không gian metric đầy thỏa mãn các điều kiện 1), 2) trên đây thì đẳng cự.

Không gian $\widetilde{M}$ gọi là cái làm đầy của không gian M.

1.1.5 Tập hợp compak và không gian compak

1. Định nghĩa

Định nghĩa 1.1.22. *Cho không gian metric $M = (X, d)$. Tập hợp $K \subset X$ gọi là tập hợp compak (hay đơn giản là compak) trong không gian M, nếu mọi dãy vô hạn phần tử của tập hợp K đều chứa dãy con hội tụ tới phần tử thuộc K; khi $K = X$ thì M gọi là không gian compak. Tập hợp K gọi là tập hợp compak tương đối trong không gian M, nếu mọi dãy vô hạn phần tử của tập hợp K đều chứa dãy con hội tụ (tới phần tử thuộc X).*

2. Một số tiêu chuẩn compak cơ bản

a. Tiêu chuẩn compak Heine-Borel

Định nghĩa 1.1.23. *Cho không gian metric $M = (X, d)$ và tập hợp $A \subset X$. Họ các tập hợp mở $(G_\alpha)_{\alpha \in I}$ trong M (tập hợp chỉ số I có lực lượng nào đấy) gọi là một phủ mở của A, nếu $\bigcup_{\alpha \in I} G_\alpha \supset A$; khi tập hợp I hữu hạn thì họ $(G_\alpha)_{\alpha \in I}$ gọi là một phủ mở con hữu hạn của A.*

Định lí 1.1.13. ***Tiêu chuẩn compak Heine-Borel***

Tập hợp $K \subset X$ là compak trong không gian $M = (X, d)$ khi và chỉ khi một phủ mở bất kì $(G_\alpha)_{\alpha \in I}$ của K chứa một phủ mở con hữu hạn của K.

b. Tiêu chuẩn compak Hausdorff

Định nghĩa 1.1.24. *Cho không gian metric $M = (X, d)$, tập hợp $A \subset X$. Tập hợp A gọi là hoàn toàn bị chặn, nếu với số dương ε cho trước tùy ý, tồn tại hữu hạn hình cầu $S_1, S_2, \ldots, S_k$ (k là số nguyên dương nào đó) với bán kính ε sao cho $A \subset \bigcup_{j=1}^{k} S_j$.*

Định lí 1.1.14. ***Tiêu chuẩn compak Hausdorff***

Không gian metric $M = (X, d)$ là không gian compak khi và chỉ khi M là không gian đầy và X là tập hợp hoàn toàn bị chặn.

Từ định lý trên dễ dàng suy ra:

- Trong không gian metric, mọi tập hợp compak tương đối là hoàn toàn bị chặn; ngược lại, trong không gian metric đầy mọi tập hợp hoàn toàn bị chặn là tập hợp compak tương đối.

- Trong không gian metric mọi tập hợp compak đều bị chặn.

3. Ánh xạ liên tục trên compak

Định lí 1.1.15. *Cho hai không gian metric $M_1 = (X, d_1)$, $M_2 = (Y, d_2)$ và ánh xạ f từ không gian M_1 đến không gian M_2. Nếu ánh xạ f liên tục trên compak $K \subset X$, thì:*

1) f liên tục đều trên K;

2) $f(K)$ là tập hợp compak trong không gian M_2.

Từ định lý trên dễ dàng suy ra:

Cho ánh xạ f ánh xạ không gian metric $M = (X, d)$ vào không gian metric $\mathbb{R}^1$. Nếu ánh xạ f liên tục trên tập hợp compak $K \subset X$, thì f đạt một giá trị lớn nhất và một giá trị nhỏ nhất trên K.

1.1.6 Không gian metric tách được

Định nghĩa 1.1.25. *Không gian metric $M = (X, d)$ gọi là không gian tách được, nếu tập hợp X chứa tập hợp con đếm được trù mật khắp nơi trong X.*

Định lí 1.1.16. *Nếu không gian metric $M = (X, d)$ là không gian compak, trong đó X là tập hợp vô hạn phần tử, thì M là không gian tách được.*

1.2 Đề bài tập

1. Chứng minh tập hợp số thực $\mathbb{R}$ cùng với ánh xạ

$$d(x,y) = |\operatorname{arctg} x - \operatorname{arctg} y|,\ x, y \in \mathbb{R}$$

là một không gian metric.

2. Cho $\mathbb{E}^k$ là không gian véctơ k chiều (thực hoặc phức). Đối với hai vector bất kỳ $x = (x_1, x_2, \ldots, x_k)$, $y = (y_1, y_2, \ldots, y_k)$ thuộc $\mathbb{E}^k$, ta đặt:

a) $d_0(x,y) = \max\limits_{1 \le j \le n} |x_j - y_j|$;

b) $d_1(x,y) = \sum\limits_{j=1}^{n} |x_j - y_j|$;

c) $d_p(x,y) = \left(\sum\limits_{j=1}^{n} |x_j - y_j|^p\right)^{\frac{1}{p}}$, với p là số thực lớn hơn 1.

Chứng minh d_1, d_2, d_p đều là các metric trên $\mathbb{E}^k$.

3. Cho $M_{[a,b]}$ là tập hợp tất cả các hàm xác định và bị chặn trên đoạn $[a;b]$. Đối với hai hàm bất kỳ $x(t), y(t) \in M_{[a,b]}$ ta đặt:

$$d(x,y) = \sup_{a \le t \le b} |x(t) - y(t)|.$$

Chứng minh d là một metric trên $M_{[a,b]}$.

4. Ta ký hiệu l_p (p là số thực không nhỏ hơn 1) là tập hợp tất cả các dãy số (thực hoặc phức) $x = (x_n)$ sao cho chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |x_n|^p$ hội tụ. Đối với hai dãy số bất kỳ $x = (x_n), y = (y_n)$ thuộc l_p, ta đặt:

$$d(x,y) = \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n - y_n|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

Chứng minh d là một metric trên l_p.

5. Cho m là tập hợp tất cả các dãy số (thực hoặc phức) bị chặn. Đối với hai dãy số bất kỳ $x = (x_n), y = (y_n)$ thuộc m, ta đặt:

$$d(x, y) = \sup_{1 \leq n \leq \infty} |x_n - y_n|.$$

Chứng minh d là một metric trên m.

6. Cho c_0 là tập hợp tất cả các dãy số thực hội tụ tới 0. Đối với hai dãy số bất kỳ $x = (x_n), y = (y_n)$ thuộc c_0, ta đặt:

$$d(x, y) = \max_{1 \leq n \leq \infty} |x_n - y_n|.$$

Chứng minh d là một metric trên c_0.

7. Cho s là tập hợp tất cả các dãy số thực $x = (x_n)$. Đối với hai dãy số bất kỳ $x = (x_n), y = (y_n)$, ta đặt:

$$d(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \cdot \frac{|x_n - y_n|}{1 + |x_n - y_n|}$$

Chứng minh d là một metric trên s.

8. Đối với hai số bất kỳ m, n thuộc tập số tự nhiên $\mathbb{N}$, ta đặt:

$$d(m, n) = \begin{cases} 1 + \dfrac{1}{m+n}, & \text{nếu } (m \neq n) \\ 0, & \text{nếu } (m = n) \end{cases}$$

Chứng minh d là một metric trên $\mathbb{N}$.

9. Cho $D_m[a, b]$ là tập hợp tất cả các hàm số giá trị thực xác định và khả vi liên tục đến cấp m $(m \in \mathbb{N}, m \geq 1)$ trên đoạn $[a; b]$. Đối với hai hàm số bất kỳ $x(t), y(t) \in D_m[a, b]$, ta đặt:

$$d(x, y) = \max_{a \leq t \leq b} \left\{ |x(t) - y(t)|, |x'(t) - y'(t)|, \ldots, |x^{(m)}(t) - y^{(m)}(t)| \right\}$$

Chứng minh d là một metric trên $D_m[a, b]$.

10. Xét tính chất hội tụ trong các không gian metric từ bài tập 1 đến bài tập 9 trên đây.

11. Chứng minh trong không gian $C_{[a,b]}$ các tập hợp sau đây mở:

a) $G_1 = \{x(t) \in C_{[a,b]} : x(t) < x_0(t), t \in [a,b]\}$, $x_0(t) \in C_{[a,b]}$ đã cho;

b) $G_2 = \{x(t) \in C_{[a,b]} : \alpha < x(t) < \beta, t \in [a,b]\}$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ đã cho, $\alpha < \beta$;

c) $G_3 = \left\{ x(t) \in C_{[a,b]} : \int\limits_a^b x(t)\,dt < x(a)(b-a) \right\}$.

12. Chứng minh trong không gian $C_{[a,b]}$ các tập hợp sau đây đóng:

a) $E_1 = \{x(t) \in C_{[a,b]} : x(t) \le x_0(t), t \in [a,b]\}$, $x_0(t) \in C_{[a,b]}$ đã cho;

b) $E_2 = \{x(t) \in C_{[a,b]} : \alpha \le x(t) \le \beta, t \in [a,b]\}$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ đã cho, $\alpha < \beta$;

c) $E_3 = \left\{ x(t) \in C_{[a,b]} : \int\limits_a^b x(t)\,dt \le x(a)(b-a) \right\}$.

13. Chứng minh:

a) Tập hợp $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0, y > 0\}$ mở trong $\mathbb{R}^2$.

b) Tập hợp $B = \{(x_n) \in l_2, x_n > 0, n \in \mathbb{N}^*\}$ không mở trong l_2.

14. Cho A là một tập hợp đóng trong không gian metric $M = (X, d)$. Chứng minh $d(x, A) = 0$ khi và chỉ khi $x \in A$. Nếu A không đóng thì mệnh đề này còn đúng không? Vì sao?

15. Cho f là hàm số liên tục trên đoạn $[a,b]$. Đặt:

$$E_n = \{x \in [a,b] : n \le f(x) \le n+1\},\ n \in \mathbb{Z}$$

Chứng minh các tập hợp E_n và $E = \bigcup\limits_{n=-\infty}^{\infty} E_n$ đều là những tập hợp đóng trong $\mathbb{R}^1$.

16. Cho không gian metric $M = (X, d)$. Chứng minh đối với hai tập hợp con bất kỳ $A, B \subset X$ đều có $(A \cup B)' = A' \cup B'$.

17. Cho không gian metric $M = (X, d)$ và tập hợp $A \subset X$. Điểm $x \in X$ gọi là điểm dính của A, nếu lân cận bất kỳ của x đều chứa ít nhất một điểm của tập hợp A. Chứng minh $A \subset X$ đóng trong không gian M khi và chỉ khi A chứa mọi điểm dính của A.

18. Cho không gian metric $M = (X, d)$. Chứng minh đối với hai tập hợp đóng bất kỳ không giao nhau $F_1, F_2 \subset X$ tồn tại hai tập hợp mở G_1, G_2 sao cho: $F_1 \subset G_1, F_2 \subset G_2$ và $G_1 \cap G_2 = \emptyset$.

19. Chứng minh trong không gian metric bất kỳ, mỗi tập hợp mở là hợp đếm được các tập hợp đóng, còn mỗi tập đóng là giao đếm được các tập hợp mở.

20. Xét tính liên tục của các ánh xạ sau đây trên không gian $C_{[a,b]}$:

a) $f(x) = \max\limits_{a \le t \le b} x(t)$; $\quad d(x,y) = \max\limits_{t \in [a,b]} |x(t) - y(t$

b) $g(x) = \max\limits_{a \le t \le b} |x(t)|$;

c) $h(x) = \min\limits_{a \le t \le b} x(t)$;

d) $k(x) = \min\limits_{a \le t \le b} |x(t)|$;

e) $y(x) = \begin{cases} 0, & \text{nếu } x(t) \text{ lấy ít nhất một giá trị âm,} \\ \dfrac{1}{2}, & \text{nếu } x(t) = 0, \forall t \in [a; b], \\ 1, & \text{nếu } x(t) \ge 0 \text{ và } x(t) \ne 0 \text{ tại ít nhất} \\ & \text{một điểm } t \in [a; b]. \end{cases}$

21. Xét tính liên tục của các ánh xạ sau đây trên không gian $D_2[a, b]$:

a) $f(x) = x(a)$;

b) $g(x) = \displaystyle\int_a^b \sqrt{1 + x'^2(t)}\, dt$.

22. Cho ánh xạ f ánh xạ không gian metric compak $M = (X, d)$ vào chính nó sao cho $d(f(x), f(y)) = d(x, y)$ $(\forall x, y \in X)$. Chứng minh phương trình $f(x) = y$ bao giờ cũng có nghiệm với mọi $y \in X$.

23. Cho hàm số f xác định trên toàn trục số thực $\mathbb{R}$ và nhận các giá trị nguyên. Chứng minh tập hợp các điểm liên tục của hàm này là tập hợp mở, còn tập hợp các điểm gián đoạn của hàm đó là tập hợp đóng.

24. Xét tính liên tục của các ánh xạ sau đây từ $C_{[0,1]}$ vào chính nó:

a) $f(x)(t) = \int\limits_0^t x^2(s)\,ds,\ x(s) \in C_{[0,1]}, 0 \le t \le 1;$

b) $g(x)(t) = x(t^\alpha),\ x(t) \in C_{[0,1]}, \alpha \ge 0.$

25. Cho ánh xạ

$$Ax(t) = \int\limits_a^b K(t, s)x(s)\,ds,\ x(s) \in C_{[a,b]},$$

trong đó $K(t, s)$ là hàm số khả vi theo hai biến số t, s trên hình vuông

$$D = \left\{(t, s) \in \mathbb{R}^2 : a \le t \le b; a \le s \le b\right\}.$$

Chứng minh ánh xạ A ánh xạ không gian $C_{[a,b]}$ vào không gian $D_1[a, b]$ và liên tục.

26. Xét tính đầy của các không gian metric từ bài tập 1 đến bài tập 9 trên đây.

27. Cho không gian metric $M = (X, d)$. Chứng minh:

a) $d_1(x, y) = \dfrac{d(x, y)}{1 + d(x, y)}$ là một metric trên X;

b) Không gian metric M đầy khi và chỉ khi không gian metric $M_1 = (X, d_1)$ đầy.

28. Cho hai không gian metric $M_1 = (X, d_1), M_2 = (Y, d_2)$. Đặt

$$Z = X \times Y = \{z = (x, y) : x \in X, y \in Y\}$$

$$d(z, z') = d_1(x, x') + d_2(y, y'),\ \forall z = (x, y) \in Z, \forall z' = (x', y') \in Z.$$

Chứng minh:

a) d là một metric trên Z;

b) Không gian metric $M = (Z, d)$ đầy khi và chỉ khi hai không gian M_1, M_2 đều đầy.

29. Cho X là tập hợp tất cả các hàm số $x(t)$ liên tục trên toàn không gian metric $\mathbb{R}^1$ sao cho $x(t) = 0$ ngoài một đoạn nào đó (đoạn này phụ thuộc từng hàm số $x(t)$). Với hai hàm số bất kỳ $x(t), y(t) \in X$ ta đặt:

$$d(x, y) = \max_{t \in \mathbb{R}^1} |x(t) - y(t)|.$$

Chứng minh d là một metric trên X và không gian metric tương ứng không đầy.

30. Cho không gian metric $M = (X, d)$. Đường kính của một tập hợp bất kỳ khác rỗng $A \subset X$ được xác định bằng công thức:

$$d(A) = \sup_{x, y \in A} d(x, y).$$

Dãy các tập hợp đóng khác rỗng $F_1, F_2, \ldots, F_n, \ldots$ trong không gian M gọi là thắt dần, nếu

$$F_n \supset F_{n+1}\ (n = 1, 2, \ldots),\ \lim_{n \to \infty} d(F_n) = 0.$$

Chứng minh không gian $M = (X, d)$ đầy khi và chỉ khi mọi dãy các tập đóng khác rỗng thắt dần có giao khác rỗng.

31. Một siêu metric trên một tập hợp $X \neq \emptyset$ là một ánh xạ d từ tích Descartes $X \times X$ vào tập hợp số thực $\mathbb{R}$ thoả mãn các điều kiện:

1) $(\forall x, y \in X) \quad d(x,y) \geq 0, d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$;
2) $(\forall x, y \in X) \quad d(x,y) = d(y,x)$;
3) $(\forall x, y, z \in X) \quad d(x,y) \leq \max\{d(x,z), d(z,y)\}$.

Tập hợp X cùng với siêu metric d gọi là không gian siêu metric. Chứng minh:

a) Một siêu metric cũng là một metric;
b) Nếu $d(x,z) \neq d(z,y)$, thì $d(x,y) = \max\{d(x,z), d(z,y)\}$;
c) Nếu hai hình cầu có điểm chung thì hình cầu này chứa trong hình cầu kia;
d) Dãy điểm $(x_n) \subset X$ là dãy cơ bản khi và chỉ khi

$$\lim_{n\to\infty} d(x_n, x_{n+1}) = 0.$$

32. Cho hàm số $x(t)$ khả vi trên đoạn $[0;1]$ thoả mãn các điều kiện:

$$0 \leq x(t) \leq 1, 0 \leq x'(t) \leq \frac{1}{2}, \ \forall t \in [0,1].$$

Xét sự tồn tại và duy nhất nghiệm của phương trình $x(t) - t = 0$ trên đoạn $[0;1]$.

33. Cho ánh xạ A ánh xạ nửa khoảng $[1,\infty)$ vào chính nó xác định bằng công thức $Ax = x + \frac{1}{x}$. A có phải là ánh xạ co không? Ánh xạ A có điểm bất động không? Vì sao?

34. Cho không gian metric đầy $M = (X,d)$, một ánh xạ f ánh xạ hình cầu đóng

$$S'(x_0, r) = \{x \in X : d(x, x_0) \leq r\}$$

vào X sao cho tồn tại số p, $0 < p < 1$, để $\forall x, y \in S'(x_0, r)$ đều có

$$d(f(x), f(y)) < pd(x,y), \quad d(f(x_0), x_0) \leq (1-p)r.$$

Chứng minh ánh xạ f có điểm bất động duy nhất trong $S'(x_0, r)$.

35. Cho hệ phương trình tuyến tính

$$x_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j + b_i,\ (i = 1, 2, \ldots, n)$$

trong đó a_{ij}, b_i là những hằng số thực,

$$\sum_{j=1}^{n} |a_{ij}| < 1\ (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Chứng minh hệ phương trình đã cho có nghiệm duy nhất.

36. Chứng minh, nếu trong định lý Banach về ánh xạ co, điều kiện A là ánh xạ co thay bằng điều kiện

$$d(Ax, Ay) < d(x, y),\ x \neq y,$$

thì sự tồn tại điểm bất động không được đảm bảo.

37. Cho hàm số $f(x) = \dfrac{\pi}{2} + x - \operatorname{arctg} x,\ x \in \mathbb{R}$. Chứng minh với x, y bất kì tìm được số $\alpha < 1$ sao cho $|f(x) - f(y)| \leq \alpha|x - y|$, nhưng phương trình $f(x) = x$ vô nghiệm.

38. Chứng minh trong mọi không gian metric, hợp hữu hạn các tập hợp compak là tập hợp compak, hợp vô hạn các tập hợp compak có là tập hợp compak không? Vì sao?

39. Chứng minh trong không gian metric bất kỳ $M = (X, d)$ ba mệnh đề sau đây là tương đương:

a) M là không gian compak;

b) Mọi phủ mở đếm được (một họ đếm được các tập hợp mở) của M đều chứa phủ mở con hữu hạn của M;

c) Mọi dãy các tập hợp đóng khác rỗng F_n trong M mà:

$$F_1 \supset F_2 \supset \ldots \supset F_n \supset \ldots$$

đều có giao khác rỗng.

40. Cho không gian metric $M = (X, d)$ thoả mãn điều kiện: tồn tại số $r > 0$ sao cho mọi hình cầu đóng $S'(a, r) = \{x \in X : d(x, a) \leq r\}$ đều là tập hợp compak. Chứng minh:

a) M là không gian metric đầy;

b) Với tập hợp compak bất kỳ $A \subset X$, tập hợp

$$B = \left\{x \in X : d(x, A) \leq \frac{r}{2}\right\}$$

là tập hợp compak.

41. Cho không gian metric compak $M = (X, d)$, ánh xạ f ánh xạ M vào chính nó thoả mãn điều kiện:

$$d(f(x), f(y)) < d(x, y), \ (\forall x, y \in X, x \neq y).$$

Chứng minh ánh xạ f có điểm bất động duy nhất. Ánh xạ f có là ánh xạ co không? Vì sao?

42. Cho K là tập hợp compak trong không gian metric $M = (X, d)$, dãy các hàm giá trị thực f_n $(n = 1, 2, \ldots)$ liên tục trên K, $f_1(x) \leq f_2(x) \leq \ldots (\forall x \in K)$ và hội tụ tới hàm giá trị thực liên tục f trên tập hợp K. Chứng minh dãy hàm (f_n) hội tụ đều trên K.

43. Cho không gian metric $M = (X, d)$ và hai tập hợp con đóng A, B của tập hợp X, trong đó A là tập hợp compak, còn B là tập hợp đóng khác rỗng. Chứng minh, nếu $A \cap B = \emptyset$ thì $d(A, B) = \inf\limits_{x \in A, y \in B} d(x, y) > 0$.

1.3 Bài tập nâng cao

44. Cho không gian metric $M = (X, d)$, d là một metric bị chặn (có nghĩa là $\sup\limits_{x,y \in X} d(x, y) < +\infty$). Đối với mỗi điểm $x \in X$ và tập hợp con khác rỗng $A \subset X$ ta đặt

$$d(x, A) = \inf_{y \in A} d(x, y).$$

Đối với hai tập hợp con khác rỗng bất kỳ $A, B \subset X$ ta đặt

$$d(A, B) = \max\left\{\sup_{x\in A} d(x, B), \sup_{y\in B} d(y, A)\right\}.$$

Chứng minh d là một metric trên tập hợp tất cả các tập hợp con đóng khác rỗng của X.

45. Chứng minh trong không gian metric $\mathbb{R}^1$ đối với mọi tập hợp con $A \subset \mathbb{R}$, nếu A' đếm được thì A đếm được. Hãy xây dựng tập hợp $A \subset \mathbb{R}$ sao cho $A'' = (A')' \neq \emptyset$ nhưng $A''' = (A'')' = \emptyset$.

46. Cho F là tập hợp đóng trong không gian metric $M = (X, d)$. Chứng minh tập hợp F không đâu trù mật trong M khi và chỉ khi $X \setminus F$ trù mật trong M. Nếu bỏ giả thiết F là tập hợp đóng, thì mệnh đề trên còn đúng không? Vì sao?

47. Cho không gian metric $M = (X, d)$, tập con khác rỗng $A \subset X$. Chứng minh tập hợp sau là mở

$$G = \{x \in X : d(x, A) < c\},$$

còn tập hợp

$$F = \{x \in X : d(x, A) \leq c\},$$

đóng, trong đó c là một số thực dương đã cho.

48. Cho ánh xạ

$$f(x) = \int_0^{\frac{1}{2}} x(t)\, dt - \int_{\frac{1}{2}}^{1} x(t)\, dt, \ x(t) \in C_{[0,1]}.$$

Chứng minh f liên tục và cận trên đúng của f trên hình cầu đơn vị

$$S'(0, 1) = \left\{x(t) \in C_{[0,1]} : \max_{0\leq t\leq 1} |x(t)| \leq 1\right\}$$

bằng 1, nhưng không đạt cận trên đúng trên hình cầu đơn vị đó.

49. Cho ánh xạ f từ không gian $\mathbb{R}^2$ vào chính nó là ánh xạ liên tục thoả mãn điều kiện:

$$(\forall x, y \in \mathbb{R}^2)\ d(f(x), f(y)) \geq \alpha.d(x, y),$$

trong đó α là hằng số và $\alpha > 1$. Chứng minh f có điểm bất động duy nhất.

50. Chứng minh trong không gian $C_{[0,1]}$ tập hợp

$$E = \left\{ x(t) \in C_{[0,1]} : x(0) = x(1) = 1, \max_{0 \leq t \leq 1} |x(t)| \leq 1 \right\}.$$

là tập hợp đóng, bị chặn, nhưng không là tập hợp compak.

51. Hãy thiết lập các tiêu chuẩn compak trong các không gian $\mathbb{R}^1$, $\mathbb{R}^k$ $(k \geq 1)$, l_2, $C_{[a,b]}$, $L_{[a,b]}$, không gian metric rời rạc.

1.4 Hướng dẫn giải

1. Dễ thấy ánh xạ d xác định trên $\mathbb{R}$. Ta kiểm tra 3 tiên đề metric: $\forall x, y, z \in \mathbb{R}$ ta có:

   Tiên đề 1:
$$d(x,y) = |\operatorname{arctg} x - \operatorname{arctg} y| \geq 0,$$
$$\begin{aligned} d(x,y) = 0 &\Leftrightarrow |\operatorname{arctg} x - \operatorname{arctg} y| = 0 \\ &\Leftrightarrow \operatorname{arctg} x - \operatorname{arctg} y = 0 \Leftrightarrow x = y. \end{aligned}$$

   Tiên đề 2:
$$d(x,y) = |\operatorname{arctg} x - \operatorname{arctg} y| = |\operatorname{arctg} y - \operatorname{arctg} x| = d(y,x).$$

   Tiên đề 3:
$$\begin{aligned} d(x,y) &= |\operatorname{arctg} x - \operatorname{arctg} y| \\ &= |\operatorname{arctg} x - \operatorname{arctg} z + \operatorname{arctg} z - \operatorname{arctg} y| \\ &\leq |\operatorname{arctg} x - \operatorname{arctg} z| + |\operatorname{arctg} z - \operatorname{arctg} y| \\ &= d(x,z) + d(z,y) \end{aligned}$$

   $\Rightarrow d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$.

   Vậy $(\mathbb{R}, d)$ lập thành một không gian metric. □

2. a) $d_0(x,y) = \max\limits_{1 \leq j \leq k} |x_j - y_j|$ xác định trên $\mathbb{E}^k$. Ta kiểm tra 3 tiên đề metric:

   Tiên đề 1 và tiên đề 2: Bạn đọc tự giải.

   Tiên đề 3: $\forall x = (x_j), y = (y_j), z = (z_j) \in \mathbb{E}^k$ ta có:
$$\begin{aligned} &|x_j - y_j| \leq |x_j - z_j| + |z_j - y_j|, j = \overline{1,k} \\ &\Rightarrow |x_j - y_j| \leq \max_{1 \leq i \leq k} |x_i - z_i| + \max_{1 \leq i \leq k} |z_i - y_i|, j = \overline{1,k} \\ &\Rightarrow \max_{1 \leq j \leq k} |x_j - y_j| \leq \max_{1 \leq i \leq k} |x_i - z_i| + \max_{1 \leq i \leq k} |z_i - y_i| \\ &\Rightarrow d_0(x,y) \leq d_0(x,z) + d_0(z,y). \end{aligned}$$

Vậy $(\mathbb{E}^k, d_0)$ lập thành một không gian metric.

b) $d_1(x,y) = \sum\limits_{j=1}^{k} |x_j - y_j|$ xác định trên $\mathbb{E}^k$. Kiểm tra 3 tiên đề metric:

Tiên đề 1 và tiên đề 2: Bạn đọc tự giải .

Tiên đề 3: $\forall x = (x_j), y = (y_j), z = (z_j) \in \mathbb{E}^k$ ta có:

$$|x_j - y_j| \leq |x_j - z_j| + |z_j - y_j|, \forall j = \overline{1,k}$$
$$\Rightarrow \sum_{j=1}^{k} |x_j - y_j| \leq \sum_{j=1}^{k} |x_j - z_j| + \sum_{j=1}^{k} |z_j - y_j|$$
$$\Rightarrow d_1(x,y) \leq d_1(x,z) + d_1(z,y).$$

Vậy $(\mathbb{E}^k, d_1)$ lập thành một không gian metric.

c) $d_p(x,y) = \left(\sum\limits_{j=1}^{n} |x_j - y_j|^p\right)^{\frac{1}{p}}$, với p là số thực lớn hơn 1. Dễ thấy d_p hoàn toàn xác định trên $\mathbb{E}^k$. Kiểm tra 3 tiên đề metric:

Tiên đề 1 và tiên đề 2: Bạn đọc tự giải.

Tiên đề 3: $\forall x = (x_j), y = (y_j), z = (z_j) \in \mathbb{E}^k$, đặt $x_j - z_j = a_j$, $z_j - y_j = b_j$, bất đẳng thức:

$$d_p(x,y) \leq d_p(x,z) + d_p(z,y)$$

có dạng

$$\left(\sum_{j=1}^{k} |x_j - y_j|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{j=1}^{k} |x_j - z_j|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{j=1}^{k} |z_j - y_j|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$
$$\Leftrightarrow \left(\sum_{j=1}^{k} |a_j + b_j|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{j=1}^{k} |a_j|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{j=1}^{k} |b_j|^p\right)^{\frac{1}{p}} \qquad (1.1)$$

Đây chính là bất đẳng thức Mincovxki. Để chứng minh bất đẳng thức (1.1), khi $p > 1$, dựa trên bất đẳng thức Holder

$$\sum_{j=1}^{k} |a_j.b_j| \leq \left(\sum_{j=1}^{k} |a_j|^p\right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\sum_{j=1}^{k} |b_j|^q\right)^{\frac{1}{q}}, \tag{1.2}$$

trong đó các số $p > 1$ và $q > 1$ liên hệ với nhau bởi điều kiện

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1. \tag{1.3}$$

Chú ý bất đẳng thức (1.2) đẳng cấp. Điều đó có nghĩa là nếu nó thỏa mãn đối với hai phần tử

$$a = (a_1, a_2, \ldots, a_k),\ b = (b_1, b_2, \ldots, b_k)$$

thì nó thỏa mãn với λa và μb, trong đó λ và μ là những số thực tùy ý. Vì vậy chỉ cần chứng minh bất đẳng thức (1.2) khi

$$\sum_{j=1}^{k} |a_j|^p = \sum_{j=1}^{k} |b_j|^q = 1 \tag{1.4}$$

Giả sử điều kiện (1.4) được thỏa mãn, ta phải chứng minh

$$\sum_{j=1}^{k} |a_j.b_j| \leq 1 \tag{1.5}$$

Xét hàm số

$$f(t) = \frac{t^p}{p} + \frac{t^{-q}}{q}$$

được xác định khi $t > 0$ và có đạo hàm

$$f'(t) = t^{p-1} - t^{-q-1} = t^{-q-1}(t^{p+q} - 1),\ \forall t > 0.$$

Rõ ràng $f'(t) < 0$ khi $0 < t < 1$ và $f'(t) > 0$ khi $t > 1$. Vậy hàm số f đạt giá trị nhỏ nhất tại $t = 1$, tức là

$$f(t) \geq f(1) = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1,\ \forall t > 0$$

Đặc biệt, lấy $t = a^{\frac{1}{q}}.b^{-\frac{1}{p}}$ ta được

$$\frac{a^{\frac{p}{q}}.b^{-1}}{p} + \frac{a^{-1}.b^{\frac{q}{p}}}{q} \geq 1 \Leftrightarrow ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q} \tag{1.6}$$

Bất đẳng thức (1.6) hiển nhiên đúng khi $a = 0$ hoặc $b = 0$. Áp dụng bất đẳng thức (1.6) cho a và b là các số $a = |a_j|, b = |b_j|$ và lấy tổng theo j từ 1 đến k, từ (1.4) ta được (1.5), từ đó ta được bất đẳng thức (1.2). Bây giờ ta chuyển sang chứng minh bất đẳng thức (1.1). Muốn vậy ta xét hằng đẳng thức

$$(|a| + |b|)^p = (|a| + |b|)^{p-1}|a| + (|a| + |b|)^{p-1}|b|.$$

Đặt $a = a_j, b = b_j$ trong hằng đẳng thức đã viết và lấy tổng theo j từ 1 đến k, chúng ta sẽ có:

$$\sum_{j=1}^{k}(|a_j| + |b_j|)^p = \sum_{j=1}^{k}(|a_j| + |b_j|)^{p-1}|a_j| + \sum_{j=1}^{k}(|a_j| + |b_j|)^{p-1}|b_j|$$

Bây giờ áp dụng bất đẳng thức Holder cho mỗi tổng ở bên phải và chú ý $(p-1)q = p$, ta được:

$$\sum_{j=1}^{k}(|a_j| + |b_j|)^p \leq$$

$$\leq \left(\sum_{j=1}^{k}(|a_j| + |b_j|)^p\right)^{\frac{1}{q}} . \left(\left[\sum_{j=1}^{k}|a_j|^p\right]^{\frac{1}{p}} + \left[\sum_{j=1}^{k}|a_j|^p\right]^{\frac{1}{p}}\right).$$

Chia cả hai vế của bất đẳng thức này cho

$$\left(\sum_{j=1}^{k}(|a_j| + |b_j|)^p\right)^{\frac{1}{q}},$$

nhận được bất đẳng thức

$$\left(\sum_{j=1}^{k}(|a_j|+|b_j|)^p\right)^{\frac{1}{p}} \le \left(\sum_{j=1}^{k}|a_j|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{j=1}^{k}|a_j|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

Đây chính là bất đẳng thức (1.1). Trong trường hợp

$$\left(\sum_{j=1}^{k}(|a_j|+|b_j|)^p\right)^{\frac{1}{q}} = 0,$$

thì bất đẳng thức (1.1) hiển nhiên đúng. Do đó ta đã kiểm tra được tiên đề tam giác đối với d_p.

Vậy $(\mathbb{E}^k, d_p)$ lập thành một không gian metric. □

3. Dễ thấy d xác định trên $M_{[a,b]}$. Ta kiểm tra 3 tiên đề metric:

Tiên đề 1 và tiên đề 2: Bạn đọc tự giải.

Tiên đề 3: $\forall x, y, z \in M_{[a,b]}, \forall t \in [a, b]$ ta có

$$|x(t)-y(t)| \le |x(t)-z(t)| + |z(t)-y(t)|,$$
$$\Rightarrow |x(t)-y(t)| \le \sup_{a\le s\le b}|x(s)-z(s)| + \sup_{a\le s\le b}|z(s)-y(s)|,$$
$$\Rightarrow \sup_{a\le t\le b}|x(t)-y(t)| \le \sup_{a\le t\le b}|x(t)-z(t)| + \sup_{a\le t\le b}|z(t)-y(t)|$$
$$\Leftrightarrow d(x,y) \le d(x,z) + d(z,y), \forall x, y, z \in M_{[a,b]}.$$

Vậy $(M_{[a,b]}, d)$ lập thành một không gian metric. □

4. Trước hết ta chứng minh d xác định trên l_p.

$\forall x = (x_n),\ y = (y_n) \in l_p$ các chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty}|x_n|^p$ và $\sum_{n=1}^{\infty}|y_n|^p$ hội tụ. Dễ dàng thấy rằng bất đẳng thức Mincovxki (1.1) đúng khi $p = 1$. Với mọi $n \in \mathbb{N}^*, p > 1$, áp dụng bất đẳng thức Mincovxki ta có:

$$\left(\sum_{k=1}^{n}|x_k-y_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} \le \left(\sum_{k=1}^{n}|x_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{k=1}^{n}|y_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$
$$\le \left(\sum_{k=1}^{\infty}|x_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{k=1}^{\infty}|y_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} < \infty \quad (1.7)$$

Từ (1.7) cho $n \to \infty \Rightarrow \left(\sum_{k=1}^{\infty}|x_k-y_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} < \infty$.

Vậy d xác định trên l_p. Tính chất đơn trị dễ thấy. Ta kiểm tra 3 tiên đề metric:

Tiên đề 1 và tiên đề 2: Bạn đọc tự giải.

Tiên đề 3: $\forall x, y, z \in l_p; \forall n \in \mathbb{N}^*$, theo bất đẳng thức Mincovxki ta có:

$$\left(\sum_{k=1}^{n}|x_k-y_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} \le \left(\sum_{k=1}^{n}|x_k-z_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{k=1}^{n}|z_k-y_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}.$$
$$\le \left(\sum_{k=1}^{\infty}|x_k-z_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{k=1}^{\infty}|z_k-y_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}. \quad (1.8)$$

cho qua giới hạn trong (1.8) khi $n \to \infty$ ta được

$$d(x,y) \le d(x,z) + d(z,y),\ \forall x, y, z \in l_p$$

Vậy (l_p, d) lập thành một không gian metric. □

5. Trước hết ta chứng minh d xác định trên m.

Thật vậy, $\forall x, y \in m \Rightarrow \exists \sup|x_n|, \sup|y_n|$ do x, y là hai dãy bị chặn. Mặt khác:

$$|x_n - y_n| \leq |x_n| + |y_n|, \forall n = 1, 2, \ldots$$
$$\Rightarrow |x_n - y_n| \leq \sup_{1\leq k\leq\infty} |x_k| + \sup_{1\leq k\leq\infty} |y_k|, \forall n = 1, 2, \ldots$$
$$\Rightarrow \sup_{1\leq n\leq\infty} |x_n - y_n| \leq \sup_{1\leq k\leq\infty} |x_k| + \sup_{1\leq k\leq\infty} |y_k| < \infty.$$

$\Rightarrow d$ xác định trên m. Tính đơn trị dễ thấy. Ta kiểm tra 3 tiên đề metric.

Tiên đề 1 và tiên đề 2: Bạn đọc tự giải.

Tiên đề 3: $\forall x, y, z \in m; \forall n \in \mathbb{N}^*$ ta có:

$$|x_n - y_n| \leq |x_n - z_n| + |z_n - y_n|,$$
$$\Rightarrow |x_n - y_n| \leq \sup_{1\leq k\leq\infty} |x_k - z_k| + \sup_{1\leq k\leq\infty} |z_k - y_k|,$$
$$\Rightarrow \sup_{1\leq n\leq\infty} |x_n - y_n| \leq \sup_{1\leq k\leq\infty} |x_k - z_k| + \sup_{1\leq k\leq\infty} |z_k - y_k|$$
$$\Rightarrow d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y).$$

Vậy (m, d) lập thành một không gian metric. □

6. Trước hết ta chứng minh d xác định trên c_0. Với hai dãy $(x_n), (y_n)$ hội tụ tới 0 thì $(z_n) = (|x_n - y_n|)$ hội tụ tới 0. Giả sử $n_0 \in \mathbb{N}^*$ là một số sao cho:

$$\varepsilon_0 = \max\{z_1, z_2, \ldots, z_{n_0}\} > 0.$$

Do $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = 0$, nên với $\varepsilon_0, \exists N_0 > n_0$:

$$0 \leq z_n < \varepsilon_0, \ \forall n > N_0.$$

Đặt $M = \max\{\varepsilon_0, z_{n_0+1}, z_{n_0+2}, \ldots, z_{N_0}\} \Rightarrow M = \max\limits_{1\leq n\leq\infty} z_n.$

Vậy d xác định trên c_0.

Kiểm tra 3 tiên đề metric:

Tiên đề 1: $\forall x, y \in c_0$ ta có

$$|x_n - y_n| \geq 0,\ \forall n = 1, 2, \ldots$$

$$\max_{1\leq n\leq\infty} |x_n - y_n| \geq 0 \Rightarrow d(x, y) \geq 0.$$

$$d(x, y) = 0 \Leftrightarrow \max_{1\leq n\leq\infty} |x_n - y_n| = 0$$

$$\Leftrightarrow x_n = y_n, \forall n \in \mathbb{N}^* \Leftrightarrow x = y.$$

Tiên đề 2: Bạn đọc tự giải.

Tiên đề 3: $\forall x, y, z \in c_0; \forall n \in \mathbb{N}^*$ ta có:

$$|x_n - y_n| \leq |x_n - z_n| + |z_n - y_n|,$$

$$\Rightarrow |x_n - y_n| \leq \max_{1\leq k\leq\infty} |x_k - z_k| + \max_{1\leq k\leq\infty} |z_k - y_k|,$$

$$\Rightarrow \max_{1\leq n\leq\infty} |x_n - y_n| \leq \max_{1\leq k\leq\infty} |x_k - z_k| + \max_{1\leq k\leq\infty} |z_k - y_k|$$

$$\Rightarrow d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y).$$

Vậy (c_0, d) lập thành một không gian metric. □

7. Trước hết ta chứng minh d xác định trên s. Thật vậy $\forall x, y \in s$ ta có:

$$0 \leq \frac{1}{2^n} \cdot \frac{|x_n - y_n|}{1 + |x_n - y_n|} \leq \frac{1}{2^n}.$$

Do chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ hội tụ, nên chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \cdot \frac{|x_n - y_n|}{1 + |x_n - y_n|}$ hội tụ.

Suy ra d xác định trên s. Kiểm tra 3 tiên đề metric:

Tiên đề 1 và tiên đề 2: Bạn đọc tự giải.

Tiên đề 3: Từ bất đẳng thức $|x_n - y_n| \leq |x_n - z_n| + |z_n - y_n|$, $\forall n = 1, 2, \ldots$ và do hàm $f(t) = \dfrac{t}{1+t}$ đồng biến trên $[0; +\infty)$, ta có $\forall x, y, z \in s$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$:

$$\frac{1}{2^n} \cdot \frac{|x_n - y_n|}{1 + |x_n - y_n|} \leq \frac{1}{2^n} \cdot \frac{|x_n - z_n| + |z_n - y_n|}{1 + |x_n - z_n| + |z_n - y_n|}$$

$$\leq \frac{1}{2^n} \cdot \frac{|x_n - z_n|}{1 + |x_n - z_n|} + \frac{1}{2^n} \cdot \frac{|z_n - y_n|}{1 + |z_n - y_n|}$$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \cdot \frac{|x_n - y_n|}{1+|x_n - y_n|} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \cdot \frac{|x_n - z_n|}{1+|x_n - z_n|} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \cdot \frac{|z_n - y_n|}{1+|z_n - y_n|}$$

$$\Leftrightarrow d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y).$$

Vậy (s,d) lập thành một không gian metric. □

8. Hiển nhiên, d ánh xạ tích $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ vào tập hợp số thực $\mathbb{R}$.

Kiểm tra 3 tiên đề metric:

Tiên đề 1 và tiên đề 2: Bạn đọc tự giải.

Tiên đề 3: $\forall m, n, p \in \mathbb{N}$, ta có:

Giả sử $m = n$, thì $d(m,n) = 0$ và $d(m,p) \geq 0$, $d(p,n) \geq 0$, nên $d(m,n) \leq d(m,p) + d(p,n)$.

Giả sử $m \neq n$, thì $d(m,n) = 1 + \dfrac{1}{m+n}$.

Nếu $m = p$, thì $n \neq p$ và

$$d(m,p) = 0, \quad d(p,n) = 1 + \frac{1}{p+n} = 1 + \frac{1}{m+n}$$

nên

$$d(m,n) = 1 + \frac{1}{m+n} = d(m,p) + d(p,n).$$

Nếu $n = p$, thì lập luận tương tự

$$d(m,n) = d(m,p) + d(p,n).$$

Nếu $m \neq p$, $n \neq p$, thì

$$d(m,p) + d(p,n) = 1 + \frac{1}{m+p} + 1 + \frac{1}{p+n},$$

nên $d(m,n) < d(m,p) + d(p,n)$.

Do đó $d(m,n) \leq d(m,p) + d(p,n)$.

Vậy, $(\mathbb{N}, d)$ lập thành một không gian metric.

9. Bạn đọc tự giải.

10. Bạn đọc tự giải.

11. a) Chứng minh $G_1 = \{x \in C_{[a,b]} : x(t) < x_0(t), t \in [a,b]\}$ là tập hợp mở.

Giả sử x là một phần tử bất kỳ thuộc G_1. Ta có $x, x_0 \in C_{[a,b]}$, đặt $z = x_0 - x$, suy ra $z \in C_{[a,b]}$. Do $x \in G_1 \Rightarrow z(t) > 0, \forall t \in [a,b]$. Đặt $r = \min\limits_{a \le t \le b} z(t)$, ta chứng minh hình cầu mở $B(x,r) \subset G_1$.

Thật vậy, $\forall y \in B(x,r)$, ta có:

$$\begin{aligned}
d(x,y) < r \Leftrightarrow \max_{a \le t \le b} |x(t) - y(t)| < r \\
\Rightarrow y(t) - x(t) < r, \forall t \in [a,b] \\
\Rightarrow y(t) < x(t) + r = x_0(t) - z(t) + r \\
\le x_0(t) - r + r = x_0(t), \forall t \in [a,b] \\
\Rightarrow y \in G_1.
\end{aligned}$$

Vậy với mọi $x \in G_1$, tồn tại một hình cầu mở $B(x,r) \subset G_1$, do đó tập hợp G_1 mở.

b) $G_2 = \{x \in C_{[a,b]} : \alpha < x(t) < \beta, t \in [a,b]\}$ là tập hợp mở trong $C_{[a,b]}$.
Chọn $x_1(t) = \alpha, x_2(t) = \beta$ là hai hàm liên tục trên đoạn $[a,b]$. Đặt:

$$\begin{aligned}
&A_1 = \{x \in C_{[a,b]} : x(t) > x_1(t), \forall t \in [a,b]\} \\
&A_2 = \{x \in C_{[a,b]} : x(t) < x_2(t), \forall t \in [a,b]\} \\
&G_2 = A_1 \cap A_2.
\end{aligned}$$

Chứng minh tương tự phần a) ta được A_1, A_2 mở, suy ra G_2 mở.

c) $G_3 = \left\{ x \in C_{[a,b]} : \int\limits_a^b x(t)\,dt < x(a)(b-a) \right\}$ là tập hợp mở.

Thật vậy, lấy phần tử bất kỳ $x \in G_3$, ta có:

$$\int_a^b x(t)dt < x(a)(b-a) \Rightarrow r = x(a)(b-a) - \int_a^b x(t)dt > 0.$$

Xét hình cầu mở $B\left(x, \dfrac{r}{2(b-a)}\right)$, ta có:

$$\begin{aligned}
\forall y \in B \Rightarrow \max_{a\le t\le b}|y(t)-x(t)| &< \frac{r}{2(b-a)} \\
\Rightarrow y(a) - x(a) &> -\frac{r}{2(b-a)} \\
\Leftrightarrow y(a) &> x(a) - \frac{r}{2(b-a)} \\
\text{và } y(t) &< x(t) + \frac{r}{2(b-a)}, \forall t \in [a,b]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \int_a^b y(t)dt \le \int_a^b x(t)dt + \frac{r}{2} &= x(a)(b-a) - r + \frac{r}{2} \\
&= x(a)(b-a) - \frac{r}{2} \\
&= (b-a)\left(x(a) - \frac{r}{2(b-a)}\right) \\
&< y(a)(b-a)
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \int_a^b y(t)\,dt < y(a)(b-a) \Rightarrow y \in G_3.$$

Do y bất kỳ nên $B \subset G_3$. Vậy G_3 là tập hợp mở trong $C_{[a,b]}$. □

12. a) $E_1 = \{x \in C_{[a,b]} : x(t) \le x_0(t), t \in [a,b]\}$ là tập hợp đóng.

Giả sử $\{x_n\} \subset E_1$ và $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$ trong $C_{[a,b]}$, nên

$$\lim_{n\to\infty}\max_{a\le t\le b}|x_n(t) - x(t)| = 0.$$

Từ đó ta có:
$$\lim_{n\to\infty} x_n(t) = x(t),\ \forall t \in [a,b].$$
Từ $\{x_n\} \subset E_1 \Rightarrow x_n(t) \le x_0(t), \forall t \in [a,b]$. Cho $n \to \infty$, ta được
$$x(t) \le x_0(t), \forall t \in [a,b] \Rightarrow x \in E_1.$$
Vậy E_1 chứa mọi điểm giới hạn của nó, suy ra E_1 đóng.

b) $E_2 = \big\{x \in C_{[a,b]} : x(t) \ge \alpha, t \in [a,b]\big\} \cap$
$$\cap \big\{x \in C_{[a,b]} : x(t) \le \beta, t \in [a,b]\big\}.$$
Theo phần a) thì E_2 là giao của hai tập hợp đóng, nên E_2 đóng.

c) $E_3 = \left\{x(t) \in C_{[a,b]} : \int\limits_a^b x(t)\,dt \le x(a)(b-a)\right\}$.

Giả sử $\{x_n\} \subset E_3$ và $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$ trong $C_{[a,b]}$, suy ra
$$\lim_{n\to\infty} x_n(a) = x(a).$$
Do trong $C_{[a,b]}$ sự hội tụ theo metric tương đương sự hội tụ đều, nhờ đó và nhờ hệ thức
$$x_n \in E_3 \Rightarrow \int\limits_a^b x_n(t)\,dt \le x_n(a)(b-a)$$
có thể chuyển qua giới hạn dưới dấu tích phân khi n tiến tới vô cùng, ta được:
$$\int\limits_a^b x(t)\,dt \le x(a)(b-a) \Rightarrow x \in E_3.$$
Vậy E_3 chứa mọi điểm giới hạn của nó, nên E_3 là tập hợp đóng.
$\square$

13. a) $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0, y > 0\}$ mở trong $\mathbb{R}^2$.

Lấy $M_0(x_0, y_0) \in A$ bất kỳ. Đặt $r = \min\{x_0, y_0\} > 0$. Xét hình cầu mở $B(M_0, r)$, ta chứng minh $B(M_0, r) \subset A$. Thật vậy:

$$\forall M(x, y) \in B \Rightarrow d(M, M_0) < r \Leftrightarrow \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < r$$

$$\Rightarrow \begin{cases} |x - x_0| < r \\ |y - y_0| < r \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > x_0 - r \geq 0 \\ y > y_0 - r \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > 0 \\ y > 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow M \in A.$$

Vậy M là điểm trong của A, do M bất kỳ nên A mở.

b) $B = \{(x_n) \in l_2, x_n > 0, n \in \mathbb{N}^*\}$ không mở trong l_2.

Xét $x_0 = \left\{\dfrac{1}{n}\right\} \in l_2$, do $\dfrac{1}{n} > 0, \forall n \Rightarrow x_0 \in B$. Ta chứng minh $\forall \varepsilon > 0$ đều tồn tại $x_\varepsilon \in S(x_0, \varepsilon)$, nhưng $x_\varepsilon \notin B$, trong đó $S(x_0, \varepsilon)$ là hình cầu mở tâm x_0, bán kính ε. Do $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < \infty$, nên:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N : \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < \varepsilon^2.$$

Xét $x_\varepsilon = \left\{\dfrac{1}{1}, \dfrac{1}{2}, \ldots, \dfrac{1}{N}, 0, 0, \ldots\right\}, x_\varepsilon \notin B$. Mặt khác:

$$d(x, x_\varepsilon) = \underbrace{\left(\sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{1}{n^2}\right)^{\frac{1}{2}}}_{\text{Euclide- k/c}} < \varepsilon \Rightarrow x_\varepsilon \in S(x_0, \varepsilon)$$

Vậy tồn tại $x_\varepsilon \in S(x_0, \varepsilon)$, nhưng $x_\varepsilon \notin B$. Do đó x_0 không là điểm trong của B, suy ra B không mở. □

14. • Giả sử A là một tập hợp đóng.

$\Rightarrow$) Giả sử $d(x, A) = 0 \Leftrightarrow \inf\limits_{y \in A} d(x, y) = 0 \Leftrightarrow \exists \{y_n\} \subset A$ sao cho:

$$\lim_{n \to \infty} d(x, y_n) = 0 \Rightarrow \lim_{n \to \infty} y_n = x.$$

Do A đóng nên $x \in A$.

$\Leftarrow$) Giả sử $x \in A \Rightarrow d(x,x) = 0 \Rightarrow \inf\limits_{y \in A} d(x,y) = 0 \Rightarrow d(x,A) = 0$.

• Nếu A không là tập hợp đóng thì điều này không còn đúng. Ví dụ: Lấy $A = (0,1)$, A là một tập hợp mở trong $\mathbb{R}$ với metric thông thường. Ta có $x = 1 \notin A$, nhưng dãy $y_n = \dfrac{n}{n+1}$, $n = 1, 2, \ldots$ tiến tới 1 khi $n \to \infty$. Do đó:

$$d(1,A) = \inf_{y \in (0,1)} |1 - y| = 0. \square$$

15. • Trước hết ta chứng minh các tập hợp có dạng

$$E_n = \{x \in [a,b] : n \leq f(x) \leq n+1\}, n \in \mathbb{Z}$$

là các tập hợp đóng. Thật vậy, với mỗi $n \in \mathbb{Z}$, lấy một dãy $(x_k) \subset E_n$ bất kì và $\lim\limits_{k \to \infty} x_k = x$. Do $(x_k) \subset E_n$, nên

$$n \leq f(x_k) \leq n+1, k = 1, 2, \ldots \tag{1.9}$$

Do f liên tục, nên có thể chuyển qua giới hạn của (1.9) khi $k \to \infty$, ta được:

$$n \leq f(x) \leq n+1,$$

nên $x \in E_n$. Vậy E_n chứa mọi điểm giới hạn của nó, do đó E_n đóng.

• Ta chứng minh tập hợp

$$E = \bigcup_{n=-\infty}^{n=\infty} E_n$$

là tập hợp đóng. Do f liên tục trên đoạn $[a;b]$, nên nó đạt được giá trị nhỏ nhất m, giá trị lớn nhất M trên đoạn này.

Đặt $n_1 = [m], n_2 = [M] + 1$.

Ta có: $E_n = \emptyset, \forall n < n_1$ hoặc $n > n_2 \Rightarrow E = \bigcup\limits_{n=-\infty}^{n=\infty} E_n = \bigcup\limits_{n=n_1}^{n=n_2} E_n$.

Do E là hợp của hữu hạn các tập hợp đóng, nên E là một tập hợp đóng. $\square$

16. Chứng minh $(A \cup B)' = A' \cup B'$.

+ Lấy một phần tử bất kỳ $x_0 \in (A \cup B)'$, suy ra với mọi lân cận $S(x_0)$ của điểm x_0,

$$\exists x \in S(x_0) \cap ((A \cup B) \setminus \{x_0\}) \Rightarrow \begin{cases} x \neq x_0 \\ x \in A \text{ hoặc } x \in B \end{cases}$$

$$\Rightarrow x_0 \in A' \text{ hoặc } x_0 \in B' \Rightarrow x_0 \in A' \cup B'$$
$$\Rightarrow (A \cup B)' \subset A' \cup B' \qquad (1.10)$$

+ Ngược lại, lấy $x_0 \in A' \cup B'$ bất kỳ, suy ra $x_0 \in A'$ hoặc $x_0 \in B'$. Giả sử $x_0 \in A'$ thì với mọi lân cận $S(x_0)$ của điểm x_0,

$$\exists x \in S(x_0) \cap (A \setminus \{x_0\}) \Rightarrow \begin{cases} x \neq x_0 \\ x \in A \cup B \end{cases} \Rightarrow x_0 \in (A \cup B)'$$
$$\Rightarrow A' \cup B' \subset (A \cup B)' \qquad (1.11)$$

Từ (1.10) và (1.11), suy ra $(A \cup B)' = A' \cup B'$. $\square$

17. $A \subset X$ đóng $\Leftrightarrow$ A chứa mọi điểm dính của nó.

$\Rightarrow$) Giả sử A là tập hợp đóng và tồn tại một điểm dính a không thuộc A, nghĩa là $a \in X \setminus A$, do A đóng nên $X \setminus A$ là một tập hợp mở. Suy ra, tồn tại hình cầu mở $S(a, r)$ sao cho:

$$S(a, r) \subset X \setminus A \Rightarrow S(a, r) \cap A = \emptyset.$$

Điều này mâu thuẫn với tính chất của điểm a. Mâu thuẫn này chứng tỏ A chứa mọi điểm dính của nó.

$\Leftarrow$) Giả sử A chứa mọi điểm dính của nó. Lấy một dãy bất kì $\{x_n\} \subset A : \lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$. Ta chứng minh $a \in A$. Do $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, nên:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}^* : \forall n \geq n_0 \Rightarrow d(x_n, a) < \varepsilon$$
$$\Rightarrow \forall n \geq n_0 : x_n \in S(a, \varepsilon).$$

Do đó mọi lân cận $S(a, \varepsilon)$ đều có vô số điểm chung với A, nên a là điểm dính của A, hay $a \in A$. Vậy, A là tập hợp đóng. $\square$

18. Giả sử $F_1, F_2 \subset X$ là hai tập hợp con đóng và $F_1 \cap F_2 = \emptyset$. Lấy $x \in F_1$ bất kỳ, thì $x \notin F_2$. Theo Bài 14, ta có $\rho_x = d(x, F_2) > 0$. Tương tự, lấy $y \in F_2$ bất kỳ thì $\rho_y = d(y, F_1) > 0$. Xét các tập hợp mở:

$$G_1 = \bigcup_{x \in F_1} S\left(x, \frac{\rho_x}{2}\right), \quad G_2 = \bigcup_{y \in F_2} S\left(y, \frac{\rho_y}{2}\right)$$

$$\Rightarrow F_1 \subset G_1, F_2 \subset G_2.$$

Ta chứng minh $G_1 \cap G_2 = \emptyset$. Thật vậy, giả sử tồn tại $z \in G_1 \cap G_2$. Do $z \in G_1 \cap G_2$, nên:

$$z \in G_1 \Rightarrow \exists x_0 \in F_1 : z \in S\left(x_0, \frac{\rho_{x_0}}{2}\right) \quad \Leftrightarrow d(x_0, z) < \frac{\rho_{x_0}}{2},$$
$$z \in G_2 \Rightarrow \exists y_0 \in F_2 : z \in S\left(y_0, \frac{\rho_{y_0}}{2}\right) \quad \Leftrightarrow d(y_0, z) < \frac{\rho_{y_0}}{2}.$$

Giả sử $\rho_{x_0} \le \rho_{y_0}$, ta có:

$$d(x_0, y_0) \le d(x_0, z) + d(z, y_0) < \frac{\rho_{x_0} + \rho_{y_0}}{2} \le \rho_{y_0}$$
$$\Rightarrow d(x_0, y_0) < \rho_{y_0}. \tag{1.12}$$

Mặt khác, do $x_0 \in F_1$ và theo định nghĩa của ρ_{y_0}, ta có:

$$\rho_{y_0} = d(y_0, F_1) = \inf_{x \in F_1} d(y_0, x) = \inf_{x \in F_1} d(x, y_0) \le d(x_0, y_0)$$
$$\Rightarrow \rho_{y_0} \le d(x_0, y_0)$$

Điều này mâu thuẫn với (1.12). Bằng cách tương tự, nếu $\rho_{y_0} < \rho_{x_0}$ cũng dẫn đến mâu thuẫn. Vậy $G_1 \cap G_2 = \emptyset$. □

19. • Giả sử F là một tập hợp đóng bất kỳ của không gian metric X. Vì F đóng, nên theo Bài 14 ta có:

$$F = \{x \in X : d(x, F) = 0\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \left\{x \in X : d(x, F) < \frac{1}{n}\right\}.$$

Theo Bài 47, ta có các tập hợp $\left\{x \in X : d(x, F) < \frac{1}{n}\right\}$ là mở. Vậy F là giao đếm được của các tập hợp mở.

• Giả sử G là một tập hợp mở, suy ra $F = X \setminus G$ đóng. Theo trên ta có: $X \setminus G = \bigcap_{n=1}^{\infty} F_n$, trong đó F_n đóng. Vậy ta có:

$$G = X \setminus (X \setminus G) = X \setminus \bigcap_{n=1}^{\infty} F_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} (X \setminus F_n),$$

với $X \setminus F_n$ là các tập hợp mở.

Vậy G là hợp đếm được của các tập hợp mở. □

20. Xét tính liên tục của các ánh xạ sau:

a) $f(x) = \max\limits_{a \le t \le b} x(t), x \in C_{[a,b]}$

Với $x, y \in C_{[a,b]}$ bất kỳ, giả sử

$$f(x) = \max_{a \le t \le b} x(t) = x(t_1), f(y) = \max_{a \le t \le b} y(t) = y(t_2), t_1, t_2 \in [a, b].$$

Không giảm tính chất tổng quát, giả sử $x(t_1) \ge y(t_2)$. Ta có $y(t_1) \le y(t_2)$, nên:

$$\begin{aligned} |f(x) - f(y)| = x(t_1) - y(t_2) &\le x(t_1) - y(t_1) = |x(t_1) - y(t_1)| \\ &\le \max_{a \le t \le b} |x(t) - y(t)| \end{aligned}$$

$$\Rightarrow |f(x) - f(y)| \le d(x, y), \forall x, y \in C_{[a,b]}.$$

Suy ra f liên tục đều trên $C_{[a,b]}$, do đó f liên tục.

b) $g(x) = \max\limits_{a \le t \le b} |x(t)|, x \in C_{[a,b]}$

Với $x, y \in C_{[a,b]}$ bất kỳ, giả sử $g(x) = |x(t_1)|$, $g(y) = |y(t_2)|$. Không giảm tính chất tổng quát, giả sử $|x(t_1)| \ge |y(t_2)|$. Ta có:

$$\begin{aligned} |g(x) - g(y)| = |x(t_1)| - |y(t_2)| &\le |x(t_1)| - |y(t_1)| \\ &\le |x(t_1) - y(t_1)| \le \max_{a \le t \le b} |x(t) - y(t)| \end{aligned}$$

$$\Rightarrow |g(x) - g(y)| \le d(x, y), \forall x, y \in C_{[a,b]}.$$

Suy ra g liên tục đều trên $C_{[a,b]}$, do đó g liên tục.

c) $h(x) = \min\limits_{a\leq t\leq b} x(t), x \in C_{[a,b]}$

Với $x, y \in C_{[a,b]}$ bất kỳ, giả sử $h(x) = x(t_1), h(y) = y(t_2)$. Không giảm tính chất tổng quát, giả sử $x(t_1) \geq y(t_2)$. Ta có:

$$|h(x) - h(y)| = x(t_1) - y(t_2) \leq x(t_2) - y(t_2) \leq \max_{a\leq t\leq b} |x(t) - y(t)|$$

$$\Rightarrow |h(x) - h(y)| \leq d(x, y), \forall x, y \in C_{[a,b]}.$$

Suy ra h liên tục đều trên $C_{[a,b]}$, do đó h liên tục.

d) $k(x) = \min\limits_{a\leq t\leq b} |x(t)|, x \in C_{[a,b]}$

Với $x, y \in C_{[a,b]}$ bất kỳ, giả sử $k(x) = |x(t_1)|, k(y) = |y(t_2)|$. Không giảm tính chất tổng quát, giả sử $|x(t_1)| \geq |y(t_2)|$. Ta có:

$$\begin{aligned} |k(x) - k(y)| &= |x(t_1)| - |y(t_2)| \leq |x(t_2)| - |y(t_2)| \\ &\leq |x(t_2) - y(t_2)| \leq \max_{a\leq t\leq b} |x(t) - y(t)| \end{aligned}$$

$$\Rightarrow |k(x) - k(y)| \leq d(x, y), \forall x, y \in C_{[a,b]}.$$

Suy ra k liên tục đều trên $C_{[a,b]}$, do đó k liên tục.

e) $$y(x) = \begin{cases} 0, & \text{nếu } x(t) \text{ lấy ít nhất một giá trị âm} \\ \dfrac{1}{2}, & \text{nếu } x(t) = 0, \forall t \in [a, b] \\ 1, & \text{nếu } x(t) \geq 0 \text{ và } x(t) \neq 0 \text{ tại ít nhất một điểm } t \end{cases}$$

Ta chứng minh y không liên tục tại $x_0(t) = 0, \forall t \in [a, b]$. Thật vậy, tồn tại $\varepsilon_0 = \dfrac{1}{4}$ sao cho:

$$(\forall \delta > 0) \left(\exists x(t) = \frac{\delta}{2}, \forall t \in [a, b]\right) \left(d(x, x_0) = \frac{\delta}{2} < \delta\right):$$

$$|y(x) - y(x_0)| = \frac{1}{2} > \frac{1}{4}.$$

Vậy y không liên tục tại $x_0 = 0$.

Bằng cách tương tự ta chứng minh được y không liên tục trên tập hợp $\{x(t) \geq 0, \forall t \in [a;b]$ và $(\exists t_1 \in [a;b])x(t_1) = 0\}$.

Tại các điểm còn lại y liên tục. □

21. Xét tính liên tục của các ánh xạ sau trong $D_2[a,b]$.

a) $f(x) = x(a), x \in D_2[a,b]$

Với mọi $x, y \in D_2[a,b]$ ta có:

$$\begin{aligned}|f(x) - f(y)| &= |x(a) - y(a)|\\ &\leq \max_{a\leq t\leq b}\{|x(t) - y(t)|, |x'(t) - y'(t)|, |x''(t) - y''(t)\}\end{aligned}$$

$$\Rightarrow |f(x) - f(y)| \leq d(x,y), \forall x, y \in D_2[a,b]$$

Vậy f liên tục đều trên $D_2[a,b]$, do đó f liên tục.

b) $g(x) = \int\limits_a^b \sqrt{1 + x'^2(t)}\, dt$

Sử dụng bất đẳng thức:

$$\frac{|a| + |b|}{\sqrt{1+a^2} + \sqrt{1+b^2}} \leq \frac{|a|}{\sqrt{1+a^2}} + \frac{|b|}{\sqrt{1+b^2}} < 2,$$

với mọi $x, y \in D_2[a,b]$ ta có:

$$\begin{aligned}|g(x) - g(y)| &= \left|\int\limits_a^b \sqrt{1 + x'^2(t)}\, dt - \int\limits_a^b \sqrt{1 + y'^2(t)}\, dt\right|\\ &= \left|\int\limits_a^b \frac{[x'(t)]^2 - [y'(t)]^2}{\sqrt{1 + [x'(t)]^2} + \sqrt{1 + [y'(t)]^2}}\, dt\right|\end{aligned}$$

$$\leq \int_a^b \frac{|x'(t)-y'(t)||x'(t)+y'(t)|}{\sqrt{1+[x'(t)]^2}+\sqrt{1+[y'(t)]^2}}\,dt$$
$$\leq \int_a^b \frac{|x'(t)-y'(t)|(|x'(t)|+|y'(t)|)}{\sqrt{1+[x'(t)]^2}+\sqrt{1+[y'(t)]^2}}\,dt$$
$$\leq 2\int_a^b |x'(t)-y'(t)|\,dt$$
$$\leq 2(b-a)d(x,y), \forall x,y \in D_2[a,b]$$

Vậy g liên tục đều trên $D_2[a,b]$, do đó g liên tục. □

22. Trước hết ta chứng minh tập hợp $f(X)$ trù mật trong X. Thật vậy, lấy một phần tử bất kỳ $a \in X$. Lập một dãy $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \subset f(X) \subset X$ như sau:

$$a_1 = f(a), a_2 = f(a_1), \dots, a_n = f(a_{n-1}), \dots$$

Ta chứng minh tồn tại một dãy con $\{a_{n_k}\} \subset \{a_n\}$ hội tụ tới a. Do X là compak, nên dãy $\{a_n\}$ chứa một dãy con $\{a_{n_k}\}$ hội tụ, do dãy $\{a_{n_k}\}$ hội tụ, nên nó là một dãy Cauchy, nghĩa là:

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_{k_0} \in \mathbb{N}^*)(\forall n_k, n_l \geq n_{k_0}) \Rightarrow d(a_{n_k}, a_{n_l}) < \varepsilon.$$

Theo giả thiết và định nghĩa của dãy $\{a_n\}$ ta có:

$$d(a, a_{n_k - n_{k_0}}) = d(a_1, a_{n_k - n_{k_0}+1})$$
$$= \dots = d(a_{n_{k_0}}, a_{n_k}) < \varepsilon, \forall n_k \geq n_{k_0}.$$

Vậy dãy $\{a_{n_k}\}$ hội tụ tới a.

Từ đó, ta có: $X \subset \overline{f(X)} \subset X \Rightarrow \overline{f(X)} = X$. Mặt khác, dễ thấy f liên tục trên X. Do đó $f(X)$ là một tập hợp compak, suy ra $f(X)$ đóng và $\overline{f(X)} = f(X) = X$, hay f là một toàn ánh. Vì vậy, phương trình $f(x) = y$ luôn có nghiệm với phần tử tùy ý $y \in X$. □

23. Gọi $A = \{x \in \mathbb{R} : f$ liên tục tại $x\}$, $A_n = \{x \in A : f(x) = n\}$, dễ dàng thấy $A = \bigcup\limits_{n\in\mathbb{Z}} A_n$. Ta chứng minh A_n là các tập hợp mở.
Thật vậy, lấy $x_0 \in A_n$ bất kỳ. Do f liên tục tại x_0, ta có:

$$(\forall 0 < \varepsilon < 1)(\exists \delta > 0)(\forall x \in S(x_0, \delta))\; |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon. \quad (1.13)$$

Do f chỉ nhận giá trị nguyên và $f(x_0) = n$ nên $f(x) = n$, $\forall x \in S(x_0, \delta)$. Vậy $\forall x_0 \in A_n$, tồn tại $S(x_0, \delta) : f(x) = n$, $\forall x \in S(x_0, \delta)$. Ta chứng minh $S(x_0, \delta) \subset A_n$, hay f liên tục tại mọi điểm thuộc hình cầu $S(x_0, \delta)$. Do f là hàm hằng trong $S(x_0, \delta)$, nên nó liên tục trong hình cầu này. Vậy x_0 là điểm trong của A_n. Do tính bất kì của x_0, nên A_n mở, do đó $A = \bigcup\limits_{n\in\mathbb{Z}} A_n$ là tập hợp mở.

Suy ra $\mathbb{R}\backslash A = \{$Tập các điểm gián đoạn của $f\}$ là tập hợp đóng.
$\square$

24. a) $f(x)(t) = \displaystyle\int_0^t x^2(s)\,ds, x(s) \in C_{[0,1]}, 0 \le t \le 1;$

Dễ dàng chứng minh được với mỗi $x \in C_{[0,1]}$, thì $f(x)$ là một hàm liên tục theo t. Do đó f ánh xạ $C_{[0,1]}$ vào chính nó. Để chứng minh f liên tục ta làm như sau. Lấy một phần tử bất kì $x_0 \in C_{[0,1]}$, đặt $M = \max\limits_{0\le t\le 1} |x_0(t)|$.

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0 : \delta.(\delta + 2M) < \varepsilon)(\forall x \in C_{[0,1]}) :$$
$$|x(t) - x_0(t)| < \delta, \forall t \in [0, 1].$$

Ta có:

$$|f(x)(t) - f(x_0)(t)| = \left|\int_0^t x^2(s)\,ds - \int_0^t x_0^2(s)\,ds\right|$$
$$\le \int_0^t |x^2(s) - x_0^2(s)|\,ds$$

$$\leq \int_0^1 |x^2(s) - x_0^2(s)|\, ds$$

$$\leq \delta \int_0^1 |x(s) + x_0(s)|\, ds, \tag{1.14}$$

$$\begin{aligned} |x(s) + x_0(s)| &= |x(s) - x_0(s) + 2x_0(s)| \\ &\leq |x(s) - x_0(s)| + 2|x_0(s)| < \delta + 2M \end{aligned}$$

Thay vào (1.14) ta được:

$$|f(x)(t) - f(x_0)(t)| < \delta(\delta + 2M) < \varepsilon, \forall t \in [0,1].$$

Do đó,

$$d(f(x), f(x_0)) = \max_{0 \leq t \leq 1} |f(x)(t) - f(x_0)(t)| < \varepsilon.$$

Vậy f liên tục tại x_0. Do x_0 bất kỳ, nên f liên tục.

b) $g(x)(t) = x(t^\alpha), x(t) \in C_{[0,1]}, \alpha \geq 0$.
Dễ thấy g ánh xạ $C_{[0,1]}$ vào chính nó. Lấy phần tử bất kì $x_0 \in C_{[0,1]}$. Ta có:

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta = \varepsilon)(\forall x \in C_{[0,1]})(d(x, x_0) < \delta):$$

$$d(g(x), g(x_0)) = \max_{0 \leq t \leq 1} |x(t^\alpha) - x_0(t^\alpha)| \leq \max_{0 \leq t \leq 1} |x(t) - x_0(t)| < \varepsilon.$$

Vậy g liên tục đều trên $C_{[0,1]}$. □

25. Bạn đọc tự giải.

26. Bạn đọc tự giải.

27. a) Kiểm tra 3 tiên đề metric.

Tiên đề 1 và tiên đề 2: Bạn đọc tự giải.

Tiên đề 3: $\forall x, y, z \in \mathbb{R}$. Do hàm $\dfrac{t}{t+1}$ đơn điệu tăng trên nửa khoảng $[0, +\infty)$ và do

$$d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$$

ta có:

$$\begin{aligned} d_1(x,y) &= \frac{d(x,y)}{1+d(x,y)} \leq \frac{d(x,z)+d(z,y)}{1+d(x,z)+d(z,y)} \\ &\leq \frac{d(x,z)}{1+d(x,z)} + \frac{d(z,y)}{1+d(z,y)} = d_1(x,z) + d_1(z,y) \\ \Rightarrow d_1(x,y) &\leq d_1(x,z) + d_1(z,y). \end{aligned}$$

Vậy $M_1 = (\mathbb{R}, d_1)$ lập thành một không gian metric.

b) $\Rightarrow$) Giả sử $\{x_n\}$ là một dãy cơ bản trong M_1, suy ra:

$$\left(\forall \varepsilon \in \left(0, \frac{1}{2}\right)\right) (\exists n_0 > 0)(\forall n, m \geq n_0) : d_1(x_n, x_m) < \varepsilon$$

$$\Leftrightarrow \frac{d(x_n, x_m)}{1 + d(x_n, x_m)} < \varepsilon \Rightarrow d(x_n, x_m) < 2\varepsilon.$$

Vậy $\{x_n\}$ là một dãy cơ bản trong M.
Do M đầy, nên tồn tại $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$, suy ra:

$$(\forall \varepsilon \in (0,1))(\exists n_1 > 0)(\forall n \geq n_1) : d(x_n, x) < \varepsilon$$

$$\Rightarrow d_1(x_n, x) = \frac{d(x_n, x)}{1 + d(x_n, x)} \leq d(x_n, x) < \varepsilon$$
$$\Rightarrow d_1(x_n, x) < \varepsilon, \forall n \geq n_1.$$

Vậy $\{x_n\}$ hội tụ tới x trong M_1, do đó M_1 đầy.
$\Leftarrow$) Giả sử $\{x_n\}$ là một dãy cơ bản trong M, suy ra:

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_2 > 0)(\forall n, m > n_2) : d(x_n, x_m) < \varepsilon$$

$$\Rightarrow \frac{d(x_n,x_m)}{1+d(x_n,x_m)} < \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon} < \varepsilon \Rightarrow d_1(x_n,x_m) < \varepsilon \text{ ; } (\forall n,m \geq n_2)$$

Vậy $\{x_n\}$ là một dãy cơ bản trong M_1.

Do M_1 đầy, nên tồn tại $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$, suy ra:

$$\left(\forall\varepsilon \in \left(0,\frac{1}{2}\right)\right)(\exists n_3 > 0)(\forall n \geq n_3) : d_1(x_n,x) < \varepsilon$$

$$\text{hay } \frac{d(x_n,x)}{1+d(x_n,x)} < \varepsilon \Leftrightarrow d(x_n,x) < \frac{\varepsilon}{1-\varepsilon} < 2\varepsilon \ (\forall n \geq n_3).$$

Vậy dãy (x_n) hội tụ tới x trong M, do đó M đầy. □

28. a) Chứng minh d là một metric trên Z

Kiểm tra 3 tiên đề:

Tiên đề 1 và tiên đề 2: Bạn đọc tự giải

Tiên đề 3: Với mọi $z = (x,y), z' = (x',y'), z'' = (x'',y'') \in Z$ ta có:

$$\begin{aligned} d_1(x,x'') &\leq d_1(x,x') + d_1(x',x'') \\ d_2(y,y'') &\leq d_2(y,y') + d_2(y',y'') \\ \Rightarrow d_1(x,x'') + d_2(y,y'') &\leq d_1(x,x') + d_2(y,y') + \\ &\quad + d_1(x',x'') + d_2(y',y'') \\ \Rightarrow d(z,z'') &\leq d(z,z') + d(z',z'') \end{aligned}$$

Vậy $M = (Z,d)$ lập thành một không gian metric.

b) Giả sử M = (Z, d) là không gian đầy. Lấy $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ là hai dãy cơ bản bất kỳ tương ứng trong M_1 và M_2. Ta có: $(\forall\varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N}^*)(\forall n,m \geq n_0)$ sao cho:

$$d_1(x_n,x_m) < \frac{\varepsilon}{2}, d_2(y_n,y_m) < \frac{\varepsilon}{2} \Rightarrow d_1(x_n,x_m) + d_2(y_n,y_m) < \varepsilon$$

Suy ra $\{z_n\} = \{(x_n,y_n)\}$ là một dãy cơ bản trong $M = (Z,d)$.

Do M đầy nên tồn tại $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = z = (x,y) \in \mathbb{Z}$. Suy ra:

$$(\forall\varepsilon > 0)(\exists n_1 > 0)(n \leq n_1) : d(z_n,z) < \varepsilon$$

$$\Rightarrow d_1(x_n, x) + d_2(y_n, y) < \varepsilon$$

$$\Rightarrow (\forall n \geq n_1) \begin{cases} d_1(x_n, x) < \varepsilon \\ d_2(y_n, y) < \varepsilon \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_n \to x & \text{trong } M_1 \\ y_n \to y & \text{trong } M_2 \end{cases}$$

Do $\{x_n\}, \{y_n\}$ là hai dãy cơ bản bất kì trong M_1 và M_2, nên M_1 và M_2 đầy.

$\Leftarrow$) Giả sử M_1 và M_2 là các không gian đầy, ta phải chứng minh $M = (Z, d)$ là một không gian đầy. Thật vậy, lấy một dãy cơ bản $\{z_n\} = \{(x_n, y_n)\}$ bất kỳ trong M. Ta có:

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_2 > 0)(\forall n, m \geq n_2) \Rightarrow d(z_n, z_m) < \varepsilon$$

$$\Rightarrow (\forall n, m \geq n_2) \begin{cases} d_1(x_n, x_m) < \varepsilon \\ d_2(y_n, y_m) < \varepsilon \end{cases}$$

Vậy $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ là các dãy cơ bản tương ứng trong M_1 và M_2, suy ra tồn tại: $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = y$. Đặt $z = (x, y)$, ta có:

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_3 > 0)(\forall n \geq n_3) \Rightarrow \begin{cases} d_1(x_n, x) < \dfrac{\varepsilon}{2} \\ d_2(y_n, y) < \dfrac{\varepsilon}{2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow d(z_n, z) < \varepsilon \ (\forall n \geq n_3) \Rightarrow \exists \lim_{n\to\infty} z_n = z$$

Do $\{z_n\} = \{(x_n, y_n)\}$ là dãy cơ bản bất kỳ trong M, nên M là không gian đầy. □

29. Việc chứng minh d là một metric trên X: Bạn đọc tự giải.

Để chứng minh (X, d) là một không gian metric không đầy, ta xét dãy hàm $\{x_n(t)\} \subset X$ xác định như sau:

$$x_n(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{t^2+1} - \dfrac{1}{n^2+1} & \text{nếu } |t| \leq n \\ 0 & \text{nếu } |t| > n \end{cases}$$

Dễ thấy $\{x_n\}$ là dãy các hàm liên tục và bằng không ngoài đoạn $[-n, n]$. Với mọi $n, p \in \mathbb{N}$, ta có:

$$d(x_{n+p}, x_n) = \max_{t\in\mathbb{R}} |x_{n+p}(t) - x_n(t)| = \max_{|t|\leq n+p} |x_{n+p}(t) - x_n(t)|.$$

Mặt khác:

$$|x_{n+p}(t) - x_n(t)| = \begin{cases} \dfrac{1}{n^2+1} - \dfrac{1}{(n+p)^2+1} & \text{với } |t| \leq n \\ \dfrac{1}{t^2+1} - \dfrac{1}{(n+p)^2+1} & \text{với } n < |t| \leq n+p \\ 0 & \text{với } |t| > n+p \end{cases}$$

Do đó

$$\begin{aligned} d(x_{n+p}, x_n) &= \max_{t\in\mathbb{R}} |x_{n+p}(t) - x_n(t)| = \max_{|t|\leq n+p} |x_{n+p}(t) - x_n(t)| \\ &\leq \frac{1}{n^2+1} - \frac{1}{(n+p)^2+1} < \frac{1}{n^2+1}. \end{aligned}$$

Vậy $\{x_n\}$ là một dãy cơ bản trong X.
Giả sử X đầy, suy ra tồn tại $x \in X$ sao cho $\lim\limits_{n\to\infty} d(x_n, x) = 0$.
Xét hàm:

$$\widetilde{x}(t) = \frac{1}{t^2+1}, t \in \mathbb{R}.$$

Dễ thấy $\widetilde{x}(t)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và $0 < \widetilde{x}(t) \leq 1, \forall t \in \mathbb{R}$. Do $\widetilde{x}(t) \neq 0, \forall t \in \mathbb{R}$, nên $\widetilde{x}(t) \notin X$. Mặt khác, ta có: $\forall t \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} 0 \leq |\widetilde{x}(t) - x(t)| &\leq |\widetilde{x}(t) - x_n(t)| + |x_n(t) - x(t)| \\ &\leq \frac{1}{n^2+1} + \max_{t\in\mathbb{R}} |x_n(t) - x(t)| \\ &= \frac{1}{n^2+1} + d(x_n, x) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow 0 \leq |\widetilde{x}(t) - x(t)| \leq \frac{1}{n^2+1} + d(x_n, x). \tag{1.15}$$

Từ (1.15) cho $n \to \infty$ ta được:

$$|\widetilde{x}(t) - x(t)| = 0, \forall t \in \mathbb{R} \Rightarrow x(t) = \widetilde{x}(t) \notin X$$

mâu thuẫn với giả thiết.

Mâu thuẫn chứng tỏ tồn tại một dãy cơ bản trong M nhưng không hội tụ trong không gian M, do đó không gian M không đầy. □

30. Bạn đọc tự giải.

31. Giả sử d là một siêu metric trên X.

a) Ta chứng minh d là một metric trên X. Kiểm tra 3 tiên đề metric.

Tiên đề 1 và tiên đề 2 được suy ra từ định nghĩa siêu metric d.

Tiên đề 3: Với mọi $x, y, z \in X$, do d là một siêu metric nên

$$\begin{aligned} & d(x,y) \le \max\{d(x,z), d(z,y)\} \le d(x,z) + d(z,y) \\ \Rightarrow\ & d(x,y) \le d(x,z) + d(z,y). \end{aligned}$$

Tiên đề 3 về metric được thỏa mãn, do đó d là một metric trên X.

b) Nếu $d(x,z) \ne d(z,y)$, khi đó không giảm tổng quát ta có thể giả sử $d(x,z) < d(z,y)$. Theo tiên đề 3 về siêu metric ta có:

$$d(x,y) \le d(z,y).$$

Nếu $d(x,y) < d(z,y)$, thì:

$$d(z,y) \le \max\{d(x,z), d(x,y)\} < d(z,y), \text{ mâu thuẫn.}$$

Vậy $d(x,y) = d(z,y) = \max\{d(x,z), d(z,y)\}$.

c) Giả sử hai hình cầu mở $B(x,r_1)$ và $B(y,r_2)$ có điểm chung và $z \in B(x,r_1) \cap B(y,r_2)$. Không mất tính tổng quát giả sử $r_2 \le r_1$, ta có:

$$d(x,y) \le \max\{d(x,z), d(z,y)\} < r_1.$$

Ta chứng minh $B(x,r_1) \supset B(y,r_2)$. Với mọi $t \in B(y,r_2)$ ta có $d(y,t) < r_2 \le r_1$, suy ra $d(x,t) \le \max\{d(x,y), d(y,t)\} < r_1$. Vậy $t \in B(x,r_1)$, do đó $B(x,r_1) \supset B(y,r_2)$.

Bằng cách tương tự, $r_1 \leq r_2 \Rightarrow B(x, r_1) \subset B(y, r_2)$.

Trường hợp $B(x, r_1)$ và $B(y, r_2)$ là hai hình cầu đóng chứng minh tương tự.

d) $\Rightarrow$) Hiển nhiên.

$\Leftarrow$) Giả sử $d(x_n, x_{n+1}) \to 0$ (khi $n \to \infty$). Khi đó, với mọi $\varepsilon > 0$, tồn tại n_0 sao cho $d(x_n, x_{n+1}) < \varepsilon$ với mọi $n \geq n_0$. Với mọi $n \geq n_0, p > 0$, bằng phương pháp quy nạp toán học, ta có:

$$\begin{aligned} d(x_n, x_{n+p}) &\leq \max\{d(x_n, x_{n+1}), d(x_{n+1}, x_{n+2}), \ldots, d(x_{n+p-1}, x_{n+p})\} \\ &< \varepsilon. \end{aligned}$$

Vậy (x_n) là một dãy cơ bản. $\square$

32. Ta có $[0, 1]$ là một tập hợp con đóng của $\mathbb{R}^1$ với metric $d(x, y) = |x - y|$. Do đó $[0, 1]$ cùng với metric của $\mathbb{R}^1$ lập thành một không gian metric đầy.
Ta chứng minh ánh xạ

$$\begin{aligned} x : [0, 1] &\longrightarrow [0, 1] \\ t &\longmapsto x(t) \end{aligned}$$

là ánh xạ co. Thật vậy, theo định lý Lagrange:

$$\begin{aligned} \forall t_1, t_2 \in [0, 1] &\Rightarrow |x(t_1) - x(t_2)| = |x'(\xi)||t_1 - t_2|, \xi \in (t_1, t_2) \\ &\Rightarrow |x(t_1) - x(t_2)| \leq \frac{1}{2}|t_1 - t_2|. \end{aligned}$$

Do đó theo nguyên lý ánh xạ co, tồn tại duy nhất $t_0 \in [0, 1]$ sao cho $x(t_0) = t_0$. $\square$

33. Ta có $[1, +\infty)$ là một tập hợp con đóng của $\mathbb{R}^1$ với metric $d(x, y) = |x - y|$. Do đó $[1, +\infty)$ cùng với metric của $\mathbb{R}^1$ lập thành một không gian metric đầy. Giả sử ánh xạ

$$\begin{aligned} A : [1, +\infty] &\longrightarrow [1, +\infty] \\ x &\longmapsto A(x) \end{aligned}$$

là ánh xạ co, suy ra tồn tại duy nhất $x_0 \in [1, +\infty)$:

$$Ax_0 = x_0 \Leftrightarrow x_0 + \frac{1}{x_0} = x_0 \Leftrightarrow \frac{1}{x_0} = 0 \text{ (vô lý)}.$$

Vậy A không có điểm bất động, do đó A không là ánh xạ co. □

34. Trước hết ta chứng minh f ánh xạ $S'(x_0, r)$ vào $S'(x_0, r)$. Thật vậy, với mọi $x \in S'(x_0, r)$ ta có:

$$\begin{aligned} d(f(x), x_0) &\le d(f(x), f(x_0)) + d(f(x_0), x_0) \\ &< p.d(x, x_0) + (1-p).r < p.r + (1-p).r \\ \Rightarrow d(f(x), x_0) &< r \Rightarrow f(x) \in S'(x_0, r). \end{aligned}$$

Do $S'(x_0, r)$ là một không gian con đóng của không gian metric đầy X, nên $S'(x_0, r)$ là không gian metric đầy với metric đã cho trên X. Suy ra ánh xạ:

$$f : S'(x_0, r) \longrightarrow S'(x_0, r)$$

là ánh xạ co, do đó f có điểm bất động duy nhất trong $S'(x_0, r)$. □

35. Xét không gian $\mathbb{R}_0^n$ với metric:

$$\forall x = (x_1, x_2, \ldots, x_n), y = (y_1, y_2, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}_0^n :$$

$$d(x, y) = \max_{1 \le i \le n} |x_i - y_i|$$

Dễ dàng chứng minh được $\mathbb{R}_0^n$ cùng với metric trên lập thành một không gian metric đầy. Xét ánh xạ:

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}_0^n &\longrightarrow \mathbb{R}_0^n \\ x &\longmapsto y = Ax + b \end{aligned}$$

với $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $A = (a_{ij})_{n \times n}$, $b = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$, $y = f(x) = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$. Ta chứng minh f là ánh xạ co.

Thật vậy, với mọi $x, x' \in \mathbb{R}_0^n$ ta có:

$$\begin{aligned}
d(f(x), f(x')) = \max_{1\le i\le n} |y_i - y_i'| &= \max_{1\le i\le n} |\sum_{j=1}^n a_{ij}.(x_j - x_j')| \\
&\le \max_{1\le i\le n} \sum_{j=1}^n |a_{ij}|.|x_j - x_j'| \\
&\le (\max_{1\le i\le n} \sum_{j=1}^n |a_{ij}|). \max_{1\le i\le n} |x_j - x_j'|
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow d(f(x), f(x')) \le (\max_{1\le i\le n} \sum_{j=1}^n |a_{ij}|).d(x, x')$$

$$\Rightarrow d(f(x), f(x')) \le \alpha.d(x, x'), \alpha = \max_{1\le i\le n} \sum_{j=1}^n |a_{ij}| < 1.$$

Vậy f là ánh xạ co, nên tồn tại duy nhất điểm bất động, suy ra hệ $x = Ax + b$ có nghiệm duy nhất. □

36. Nếu điều kiện A là ánh xạ co thay bằng điều kiện

$$d(Ax, Ay) < d(x, y), x \neq y.$$

thì sự tồn tại điểm bất động không được đảm bảo. Thật vậy, xét ánh xạ:

$$\begin{aligned}
f : \mathbb{R}^1 &\longrightarrow \mathbb{R}^1 \\
x &\longmapsto \sqrt{x^2+1}.
\end{aligned}$$

Ta có:

$$|f(x) - f(y)| = |\sqrt{x^2+1} - \sqrt{y^2+1}| = |f'(\xi)||x - y|,$$

$$|f'(\xi)| = \frac{|\xi|}{\sqrt{\xi^2+1}} < 1$$

$$\Rightarrow |f(x) - f(y)| < |x - y|, \forall x \neq y$$

$$\Rightarrow d(f(x), f(y)) < d(x, y), \forall x \neq y.$$

Nên ánh xạ f thoả mãn điều kiện bài toán. Nhưng dễ thấy f không có điểm bất động. □

37. Hàm số
$$f(x) = \frac{\pi}{2} + x - \operatorname{arctg} x, x \in \mathbb{R}$$

Với mọi $x, y \in \mathbb{R}$, ta có:

$$|f(x) - f(y)| = |f'(\xi)||x - y| = \left|\frac{\xi^2}{1+\xi^2}\right| |x - y|.$$

Chọn $\alpha = \dfrac{\xi^2}{1+\xi^2} < 1$ ta được:

$$|f(x) - f(y)| \leq \alpha.|x - y|, \alpha < 1.$$

Tuy nhiên phương trình:

$$f(x) = x \Leftrightarrow \operatorname{arctg} x = \frac{\pi}{2}$$

vô nghiệm. □

38. Giả sử $A_1, A_2, \ldots, A_n$ là các tập hợp compak, đặt $A = \bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i$. Ta chứng minh A là một tập hợp compak. Giả sử $(G_i)_{i\in I}$ là một phủ mở của A. Với mỗi $k = \overline{1, n}$, do A_k là tập hợp compak và $(G_i)_{i\in I}$ là một phủ mở của A_k, nên:

$$\exists I_k \text{ hữu hạn} \subset I : A_k \subset \bigcup_{i \in I_k} G_i,$$
$$A = \bigcup_{i=1}^{n} A_i \Rightarrow A \subset \bigcup_{k=1}^{n} \left(\bigcup_{i\in I_k} G_i \right).$$

Do đó với mọi phủ mở của A đều tồn tại một phủ con hữu hạn. Vậy A là tập hợp compak.

Hợp vô hạn các tập hợp compak có thể là một tập hợp compak và cũng có thể không là một tập hợp compak.

Ví dụ:

+ Xét họ $A_n = [-n, n]$ là các tập hợp compak trong $\mathbb{R}^1$, tuy nhiên $\mathbb{R}^1 = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ không là một tập hợp compak.

+ Xét họ $A_0 = \left[0, \frac{1}{3}\right]$, $A_1 = \left[\frac{2}{3}, 1\right]$, $A_n = \left[\frac{1}{n}, 1 - \frac{1}{n}\right]$, $n \geq 2$ là các tập hợp compak trong $\mathbb{R}^1$ và $[0,1] = \bigcup_{n=2}^{\infty} A_n$ là một tập hợp compak trong $\mathbb{R}^1$. □

39. **(a ⇒ b)** Định lý Heine-Borel

(b ⇒ c) Giả sử mọi phủ mở đếm được của M đều có một phủ con hữu hạn. Nếu (F_n) là dãy các tập hợp đóng khác rỗng trong M và

$$F_1 \supset F_2 \supset \ldots \supset F_n \supset \ldots$$

Ta chứng minh (F_n) có giao khác rỗng. Thật vậy, giả sử

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n = \emptyset.$$

Đặt $G_n = X \setminus F_n, n = 1, 2, \ldots$ (G_n) là họ đếm được các tập hợp mở trong M. Ta có:

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} G_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} (X \setminus F_n) = X \setminus \left(\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n\right) = X$$

Vậy (G_n) là một phủ mở đếm được của M, theo giả thiết tồn tại một phủ con hữu hạn: $G_{n_1}, G_{n_2}, \ldots, G_{n_k} \in (G_n)$ sao cho

$$X \subset \bigcup_{j=1}^{k} G_{n_j} = \bigcup_{j=1}^{k} (X \setminus F_{n_j}) = X \setminus \bigcap_{j=1}^{k} F_{n_j} = X \setminus F_{n_k} \Rightarrow F_{n_k} = \emptyset.$$

Điều này trái với giả thiết, do đó (F_n) có giao khác rỗng.

(c ⇒ a) Giả sử trong M mọi dãy các tập hợp đóng khác rỗng F_n trong M mà:

$$F_1 \supset F_2 \supset \ldots \supset F_n \supset \ldots$$

đều có giao khác rỗng. Ta chứng minh M là một tập hợp compak. Thật vậy, giả sử $\{x_n\}$ là một dãy bất kỳ trong X. Đặt $F_n = \overline{\{x_n, x_{n+1}, \ldots\}}$ là bao đóng của bao tuyến tính của $(x_n, x_{n+1}, \ldots)$ $(n = 1, 2, \ldots)$. Ta có:

$$F_1 \supset F_2. \supset \ldots \supset F_n \supset \ldots \text{ và } F_n \neq \emptyset, \forall n = 1, 2, \ldots$$

Theo giả thiết ta có $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} F_n \neq \emptyset$. Giả sử $a \in \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} F_n$ và V là một lân cận bất kỳ của a. Với mọi m, ta có:

$$a \in F_m \Rightarrow \exists n \geq m : x_n \in V \text{ (do } a \text{ là điểm giới hạn của } F_m)$$

Vậy với mọi lân cận của a đều chứa ít nhất một phần tử x_n của dãy $\{x_n\}$, do đó a là điểm giới hạn của $\{x_n\}$. Suy ra tồn tại một dãy con của $\{x_n\}$ hội tụ tới a trong X. Do dãy $\{x_n\}$ bất kỳ nên X là tập hợp compak. □

40. a) Giả sử $\{x_n\}$ là một dãy cơ bản trong M. Với $\varepsilon = r$, ta có:

$$(\exists n_0)(\forall n \geq n_0) \Rightarrow d(x_{n_0}, x_n) \leq r \Rightarrow x_n \in S'(x_{n_0}, r)(\forall n \geq n_0).$$

Do $S'(x_{n_0}, r)$ là tập hợp compak, nên tồn tại $\{x_{n_k}\} \subset \{x_n\}$ (với $n \geq n_0$) hội tụ tới $x_0 \in S'(x_{n_0}, r)$. Mặt khác:

$$(\forall n \geq n_0)\ 0 \leq d(x_n, x_0) \leq d(x_n, x_{n_k}) + d(x_{n_k}, x_0) \tag{1.16}$$

Từ (1.16) cho $n, n_k \to \infty$ ta được $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = x_0$. Vậy mọi dãy cơ bản trong M đều hội tụ, suy ra M là không gian đầy.

b) Giả sử $A \subset X$ là một tập hợp compak, ta chứng minh tập $B = \left\{x \in X : d(x, A) \leq \frac{r}{2}\right\}$ là tập hợp compak. Theo chứng minh của Bài 47 thì B là một tập hợp đóng. Ta chứng minh B là một tập hợp compak tương đối. Thật vậy, lấy một dãy bất kỳ $\{x_n\} \subset B$ ta có:

Với mỗi $n = 1, 2, \ldots$, do $x_n \in B \Rightarrow d(x_n, A) = \inf\limits_{x \in A} d(x_n, x) \leq \frac{r}{2}$.

Theo tính chất của cận dưới đúng tồn tại $a_n \in A$ sao cho:

$$d(x_n, a_n) \le d(x_n, A) + \frac{r}{4} \le \frac{r}{2} + \frac{r}{4}$$

$$\Rightarrow \exists \{a_n\} \subset A : d(x_n, a_n) \le \frac{3r}{4}.$$

Do A là tập hợp compak, nên tồn tại $\{a_{n_k}\} \subset \{a_n\}$ hội tụ tới $a_0 \in A$. Ta có:

$$\left(\forall \varepsilon \in \left(0, \frac{r}{4}\right)\right) (\exists n_{k_0})(\forall n_k \ge n_{k_0})$$

$$d(a_{n_k}, a_0) < \varepsilon < \frac{r}{4}$$

$$\Rightarrow d(x_{n_k}, a_0) \le d(x_{n_k}, a_{n_k}) + d(a_{n_k}, a_0) < \frac{3r}{4} + \frac{r}{4} = r$$

$$\Rightarrow d(x_{n_k}, a_0) < r$$

$$\Rightarrow x_{n_k} \subset S'(a_0, r), \forall n \ge n_{k_0}.$$

Do $S'(a_0, r)$ là tập hợp compak, nên tồn tại $\{x_{n_{k_h}}\} \subset \{x_{n_k}\}$ hội tụ tới $x_0 \in S'(a_0, r)$.

Vậy B là một tập hợp compak tương đối và đóng, do đó B là một tập hợp compak. □

41. $M = (X, d)$, f ánh xạ M vào chính nó thoả mãn điều kiện:

$$d(f(x), f(y)) < d(x, y), (\forall x, y \in X, x \ne y).$$

Lập hàm

$$\begin{aligned} \varphi : M &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \varphi(x) = d(x, f(x)). \end{aligned}$$

Với mọi $x \ne y \in M$ ta có:

$$\begin{aligned} |\varphi(x) - \varphi(y)| &= |d(x, f(x)) - d(y, f(y))| \\ &\le d(x, y) + d(f(x), f(y)) < 2d(x, y) \end{aligned}$$

(Bất đẳng thức tứ giác)

$$\Rightarrow |\varphi(x) - \varphi(y)| < 2d(x, y), \forall x \ne y.$$

Do đó φ liên tục đều trên X.

Mặt khác $\varphi(x) \geq 0, \forall x \in X$ và (X, d) là không gian compak, nên tồn tại $x_0 \in X$ để $\varphi(x_0) = \min\limits_{x\in X} \varphi(x) \geq 0$. Nếu $\varphi(x_0) > 0$, thì $d(x_0, f(x_0)) > 0 \Rightarrow x_0 \neq f(x_0)$.

Theo giả thiết ta có:

$$\varphi(x_0) \leq d(f(x_0), f(f(x_0))) < d(x_0, f(x_0)) = \varphi(x_0) \text{ (mâu thuẫn).}$$

Vậy $\varphi(x_0) = 0$, suy ra tồn tại $x_0 \in X : f(x_0) = x_0$.

Tính duy nhất: Giả sử $\exists x_0' \in X : f(x_0') = x_0', x_0' \neq x_0$. Theo giả thiết ta có:

$$d(f(x_0'), f(x_0)) < d(x_0', x_0) \Rightarrow d(x_0', x_0) < d(x_0', x_0) \text{ (vô lý)}$$

Vậy điểm bất động của f tồn tại và là duy nhất. □

42. Do $\{f_n\}$ là một dãy hàm đơn điệu tăng và $f_n \to f$ $(n \to \infty)$, nên:

$$f_n(x) \leq f(x),\ \forall x \in K, \forall n = 1, 2, \ldots$$

Với $\varepsilon > 0$ (nhỏ tùy ý), với mỗi $n \in \mathbb{N}^*$ đặt:

$$A_n = \{x \in K : f(x) - f_n(x) \geq \varepsilon\}.$$

Do f_n và f là các hàm liên tục trên K, nên $\{A_n\}$ là dãy các tập hợp đóng. Ta chứng minh $A_m \subset A_n, \forall m, n = 1, 2, \ldots, m > n$. Thật vậy, ta có:

$$\begin{aligned} &f_n(x) \leq f_m(x), \forall x \in K \\ \Rightarrow\ &f(x) - f_m(x) \leq f(x) - f_n(x), \forall x \in K. \end{aligned} \tag{1.17}$$

Lấy một phần tử bất kì $x \in A_m$, suy ra: $f(x) - f_m(x) \geq \varepsilon$. Theo (1.17), ta có: $f(x) - f_n(x) \geq \varepsilon \Rightarrow x \in A_n$. Do tính bất kì của x, nên $A_m \subset A_n$. Nếu $A_n \neq \emptyset, \forall n = 1, 2, \ldots$ thì với mỗi n ta chọn một phần tử $x_n \in A_n$. Ta được một dãy $\{x_n\} \subset K$. Do K là tập hợp compak, nên:

$$\exists \{x_{m_s}\} \subset \{x_n\} : \lim_{s\to\infty} x_{m_s} = x_0 \in K.$$

Với mỗi số nguyên dương bất kì s, ta có:

$$x_{m_{s+p}} \in A_{m_{s+p}} \subset A_{m_s} \subset A_n, \forall p > 0, m_s > n$$

Do A_n đóng, nên:

$$\lim_{p\to\infty} x_{m_{s+p}} = x_0 \in A_n (\forall n = 1, 2, \dots) \Rightarrow x_0 \in \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n.$$

Điều này là vô lý, bởi vì:

$$0 = \lim_{n\to\infty} |f_n(x_0) - f(x_0)| \geq \varepsilon > 0.$$

Vậy phải tồn tại một số nguyên dương n_0 sao cho $A_{n_0} = \emptyset$, khi đó $A_n = \emptyset, \forall n \geq n_0$. Từ định nghĩa của A_n ta có:

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon, \forall n \geq n_0, \forall x \in K.$$

Vậy (f_n) hội tụ đều tới f trên K. □

43. Giả sử A, B là hai tập hợp con của tập hợp X, trong đó A là tập hợp compak, còn B là tập hợp đóng khác rỗng và $A \cap B = \emptyset$. Ta chứng minh $d(A, B) > 0$. Thật vậy, giả sử $d(A, B) = 0$, suy ra tồn tại $\{x_n\} \subset A, \{y_n\} \subset B : \lim\limits_{n\to\infty} d(x_n, y_n) = 0$. Do A là tập hợp compak, nên tồn tại $\{x_{n_k}\} \subset \{x_n\}$ sao cho: $\lim\limits_{n_k\to\infty} x_{n_k} = x_0 \in A$. Mặt khác, ta có:

$$d(y_{n_k}, x_0) \leq d(y_{n_k}, x_{n_k}) + d(x_{n_k}, x_0) \tag{1.18}$$

Cho qua giới hạn trong bất đẳng thức (1.18) khi $k \to \infty$ ta được:

$$\lim_{n_k\to\infty} y_{n_k} = x_0.$$

Do B là tập hợp đóng, nên $x_0 \in B \Rightarrow A \cap B \neq \emptyset$, mâu thuẫn với giả thiết. Mâu thuẫn đó chứng tỏ $d(A, B) > 0$. □

44. Theo giả thiết d là một metric bị chặn, nghĩa là metric d thỏa mãn điều kiện

$$\sup_{x,y\in X} d(x,y) < \infty.$$

Kí hiệu tập hợp tất cả các tập hợp con đóng, khác rỗng của tập hợp X là $\mathcal{X}$. Khi đó dễ dàng thấy được d xác định trên $\mathcal{X}$.

Kiểm tra 3 tiên đề metric.

+ Tiên đề 1: Với mọi $A, B \in \mathcal{X}$

Hiển nhiên $d(A,B) \geq 0$

$$d(A,B) = 0 \Leftrightarrow \max\left\{\sup_{x\in A} d(x,B), \sup_{y\in B} d(y,A)\right\} = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sup\limits_{x\in A} d(x,B) = 0 \\ \sup\limits_{y\in B} d(y,A) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} d(x,B) = 0, \forall x \in A \\ d(y,A) = 0, \forall y \in B \end{cases} \tag{1.19}$$

Ta chứng minh $(d(x,B) = 0, \forall x \in A) \Leftrightarrow A \subset B$.

Thật vậy, giả sử $d(x,B) = 0, \forall x \in A$. Lấy $x \in A$ bất kì. Do $d(x,B) = \inf\limits_{y\in B} d(x,y) = 0$, suy ra tồn tại $(y_n) \subset B$:

$$\lim_{n\to\infty} d(x,y_n) = 0 \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} y_n = x.$$

Do B đóng, nên $x \in B$. Từ tính bất kì của $x \in A$, suy ra $A \subset B$.

Ngược lại, giả sử $A \subset B$. Khi đó với mọi $x \in A$, thì $x \in B$. Do đó $d(x,B) = \inf\limits_{y\in B} d(x,y) = 0$.

Tương tự ta chứng minh được $(d(y,A) = 0, \forall y \in B) \Leftrightarrow B \subset A$.

Ta có

$$(1.19) \Leftrightarrow \begin{cases} A \subset B \\ B \subset A \end{cases} \Leftrightarrow A = B.$$

Vậy $d(A,B) = 0 \Leftrightarrow A = B$.

+ Tiên đề 2: Với mọi $A, B \in \mathcal{X}$, ta có:

$$\begin{aligned} d(A,B) &= \max\left\{\sup_{x\in A} d(x,B), \sup_{y\in B} d(y,A)\right\} \\ &= \max\left\{\sup_{x\in B} d(x,A), \sup_{y\in A} d(y,B)\right\} = d(B.A). \end{aligned}$$

+ Tiên đề 3: Giả sử $A, B, C \in \mathcal{X}$ bất kì. Giả sử x, y là hai phần tử cố định tùy ý, $x \in A, y \in B$, $\forall z \in C$ ta có:

$$\begin{aligned} & d(x,y) \le d(x,z) + d(z,y) \\ \Rightarrow\ & d(x,y) \le \inf_{z\in C} \{d(x,z) + d(z,y)\} = \inf_{z\in C} d(x,z) + \inf_{z\in C} d(z,y) \\ \Rightarrow\ & d(x,y) \le d(x,C) + d(y,C) \le \sup_{x\in A} d(x,C) + \sup_{y\in B} d(y,C) \\ \Rightarrow\ & d(x,y) \le d(A,C) + d(B,C). \end{aligned}$$

Do tính chất tùy ý của $y \in B$, nên

$$\begin{aligned} & \inf_{y'\in B} d(x,y') \le d(x,y) \le d(A,C) + d(B,C) \\ & \Rightarrow d(x,B) \le d(A,C) + d(B,C). \end{aligned}$$

Do tính chất tùy ý của $x \in A$, nên

$$\sup_{x\in A} d(x,B) \le d(A,C) + d(B,C).$$

Bằng cách hoàn toàn tương tự, ta có:

$$\begin{aligned} & \sup_{y\in B} d(y,A) \le d(A,C) + d(B,C) \\ & \Rightarrow d(A,B) \le d(A,C) + d(B,C) \end{aligned}$$

Vậy d là một metric trên $\mathcal{X}$. $\square$

45. Bạn đọc tự giải.

46. $\Rightarrow$) Giả sử F là tập hợp đóng, không đâu trù mật trong M và $X \setminus F$ không phải là tập hợp trù mật trong M. Do đó, tồn tại $x \in X$ và $\varepsilon > 0$:

$$S(x,\varepsilon) \cap (X \setminus F) = \emptyset \Rightarrow S(x,\varepsilon) \subset F.$$

Điều này mâu thuẫn với giả thiết F không đâu trù mật trong M. Suy ra $X \setminus F$ trù mật trong M.

$\Leftarrow$) Giả sử F đóng, $X \setminus F$ trù mật trong M, ta phải chứng minh F không đâu trù mật trong M. Giả sử F không phải là tập hợp không đâu trù mật trong M, suy ra tồn tại một hình cầu mở S_1, sao cho mọi hình cầu mở $S_2 \subset S_1$ ta có: $S_2 \cap F \neq \emptyset$.

Do $X \setminus F$ trù mật trong $M \Rightarrow S_2 \cap (X \setminus F) \neq \emptyset$, $S_2 \cap (X \setminus F)$ mở. Lấy $x \in S_2 \cap (X \setminus F)$, tồn tại lân cận $S_3 \subset S_2 \cap (X \setminus F)$. Ta có $S_3 \subset S_2$ và $S_3 \subset X \setminus F \Rightarrow S_3 \cap F = \emptyset$. Suy ra F không đâu trù mật trong M.

Nếu F không đóng thì bài toán không còn đúng nữa.

Ví dụ: Tập $\mathbb{Q}$ không đóng trong $\mathbb{R}$, $\mathbb{Q}$ trù mật trong $\mathbb{R}$. Mặt khác $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ cũng trù mật trong $\mathbb{R}$. □

47. Lấy $x_0 \in G$, suy ra: $d(x_0, A) < c$. Đặt $r = c - d(x_0, A) > 0$. Xét hình cầu mở $S\left(x_0, \dfrac{r}{2}\right)$. Ta chứng minh: $S\left(x_0, \dfrac{r}{2}\right) \subset G$. Thật vậy, lấy phần tử bất kì $x \in S\left(x_0, \dfrac{r}{2}\right)$ và $a \in A$. Ta có: $d(x, x_0) < \dfrac{r}{2}$,

$$\begin{aligned} d(x, A) = \inf_{y \in A} d(x, y) \leq d(x, a) &\leq d(x, x_0) + d(x_0, a) \\ &< \frac{r}{2} + d(x_0, a) \qquad (1.20) \end{aligned}$$

Theo định nghĩa $d(x_0, A) = \inf\limits_{y \in A} d(x_0, y)$, nên với $\varepsilon = \dfrac{r}{2}$, $\exists a_0 \in A$

sao cho: $d(x_0, a_0) < \frac{r}{2} + d(x_0, A)$. Thay a bởi a_0 vào (1.20) ta có:

$$d(x, A) < \frac{r}{2} + \frac{r}{2} + d(x_0, A) \Rightarrow d(x, A) < r + d(x_0, A)$$
$$\Rightarrow d(x, A) < c$$

Suy ra $S\left(x_0, \frac{r}{2}\right) \subset G$, hay x_0 là điểm trong của G. Do x_0 bất kỳ nên G mở.

Để chứng minh F đóng, ta chứng minh tập hợp $X \setminus F = \{x \in X : d(x, A) > c\}$ là tập hợp mở tương tự như chứng minh G là tập hợp mở.

Cách khác: Chứng minh ánh xạ $d(x, A)$ ánh xạ X vào $\mathbb{R}$ liên tục trên X và sử dụng:

$$G = d^{-1}\left((-\infty, c)\right); F = d^{-1}\left((-\infty, c]\right),$$

trong đó $(-\infty, c)$ là một tập hợp mở của $\mathbb{R}$, còn $(-\infty, c]$ là tập hợp đóng của $\mathbb{R}$. Từ đó suy ra G là tập hợp mở, còn F là tập hợp đóng trong $\mathbb{R}$. □

48. Tính liên tục: Với mọi $x, y \in C_{[0,1]}$ ta có:

$$\begin{aligned}
|f(x) - f(y)| &= \left| \int_0^{\frac{1}{2}} [x(t) - y(t)]\, dt - \int_{\frac{1}{2}}^1 [x(t) - y(t)]\, dt \right| \\
&\le \left| \int_0^{\frac{1}{2}} [x(t) - y(t)]\, dt \right| + \left| \int_{\frac{1}{2}}^1 [x(t) - y(t)]\, dt \right| \\
&\le \int_0^{\frac{1}{2}} |x(t) - y(t)|\, dt + \int_{\frac{1}{2}}^1 |x(t) - y(t)|\, dt \\
&= \int_0^1 |x(t) - y(t)|\, dt
\end{aligned}$$

$$\leq \int_0^1 \max_{0\leq t\leq 1} |x(t) - y(t)|\, dt = d(x, y).$$

Suy ra f liên tục đều trên $C_{[0,1]}$.

Với mọi $x \in S'(0,1)$ ta có:

$$|f(x)| = \left|\int_0^{\frac{1}{2}} x(t)\, dt - \int_{\frac{1}{2}}^1 x(t)\, dt\right| \leq \int_0^1 |x(t)|\, dt \leq 1.$$

Suy ra f bị chặn trên trên $S'(0,1)$, vậy tồn tại $\sup_{x\in S'} f(x)$ và $\sup_{x\in S'} f(x) \leq 1$. Để chứng minh $\sup_{x\in S'} f(x) = 1$ ta xây dựng một dãy $\{x_n\} \in S'$ như sau:

$$x_n(t) = \begin{cases} 1, & \text{nếu } 0 \leq t < \frac{1}{2} - \frac{1}{n} \\ -nt + \frac{n}{2}, & \text{nếu } \frac{1}{2} - \frac{1}{n} \leq t \leq \frac{1}{2} + \frac{1}{n} \\ -1, & \text{nếu } \frac{1}{2} + \frac{1}{n} < t \leq 1 \end{cases}$$

Rõ ràng $x_n(t) \in S'(0,1)$ và $f(x_n) = 1 - \frac{1}{n}$, suy ra $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = 1$. Vậy, ta có $\sup_{x\in S'} f(x) = 1$.

Để chứng minh f không đạt cận trên đúng trên $S'(0,1)$, trước hết ta chứng minh các bổ đề sau:

Bổ đề 1. *Giả sử f là một hàm số liên tục, không âm trên $[a,b]$ và tồn tại $x_0 \in [a,b]$ sao cho $f(x_0) > 0$. Khi đó $\int_a^b f(x)\, dx > 0$.*

Chứng minh

Do f liên tục và $f(x_0) > 0$, nên tồn tại một lân cận $S(x_0)$ của x_0 (hoặc lân cận phải nếu $x_0 = a$, lân cận trái nếu $x_0 = b$ sao cho:

$f(x) > 0, \forall x \in S(x_0)$. Gọi $[\alpha, \beta]$ là một đoạn chứa trong $S(x_0)$. Khi đó:

$$\int_a^b f(x)\,dx \geq \int_\alpha^\beta f(x)\,dx > 0.$$

Bổ đề 2. *Giả sử f và g là hai hàm liên tục trên $[a, b]$ thỏa mãn: $f(x) \leq g(x), \forall x \in [a, b]$. Khi đó:*

$$\left(\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b g(x)\,dx\right) \Leftrightarrow (f(x) = g(x), \forall x \in [a, b]).$$

Chứng minh

$\Rightarrow$) Giả sử $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b g(x)\,dx$, ta chứng minh

$$f(x) = g(x), \forall x \in [a, b].$$

Thật vậy, giả sử tồn tại $x_0 \in [a, b]$ sao cho: $f(x_0) < g(x_0)$, hay $g(x_0) - f(x_0) > 0$. Do hàm f và g liên tục trên $[a, b]$, nên hàm $g - f$ liên tục trên đoạn này. Áp dụng Bổ đề 1 ta được $\int_a^b [g(x) - f(x)]\,dx > 0$, hay $\int_a^b g(x)\,dx > \int_a^b f(x)\,dx$ (mâu thuẫn với giả thiết). Mâu thuẫn này chứng tỏ $f(x) = g(x), \forall x \in [a, b]$.

$\Leftarrow$) Hiển nhiên.

Bổ đề 3. *Giả sử f là một hàm số liên tục $[a, b]$. Khi đó*

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| = \int_a^b |f(x)|\,dx$$

khi và chỉ khi $f(x) \geq 0$ hoặc $f(x) \leq 0$ với mọi $x \in [a, b]$.

Chứng minh

$\Rightarrow$) Giả sử $\left|\int\limits_a^b f(x)\,dx\right| = \int\limits_a^b |f(x)|\,dx.$

Nếu tồn tại $x_1, x_2 \in [a,b] : f(x_1) > 0$ và $f(x_2) < 0$. Khi đó $|f(x)| \geq f(x), \forall x \in [a,b]$ và $|f| \neq f$, $|f(x)| \geq -f(x), \forall x \in [a,b]$ và $|f| \neq -f$. Theo Bổ đề 2, ta có:

$$\int\limits_a^b |f(x)|\,dx > \int\limits_a^b f(x)\,dx \quad \text{và} \quad \int\limits_a^b |f(x)|\,dx > -\int\limits_a^b f(x)\,dx.$$

Do đó $\int\limits_a^b |f(x)|\,dx > \left|\int\limits_a^b f(x)\,dx\right|$ (mâu thuẫn với giả thiết). Mâu thuẫn này chứng tỏ $f(x) \geq 0$ hoặc $f(x) \leq 0$ với mọi $x \in [a,b]$.

$\Leftarrow$) Hiển nhiên.

Bây giờ, ta trở lại bài toán. Giả sử f đạt được cận trên đúng trên $S'(0,1)$, nên tồn tại $x_0 \in S'(0,1)$ sao cho:

$$\int\limits_0^{\frac{1}{2}} x_0(t)\,dt - \int\limits_{\frac{1}{2}}^1 x_0(t)\,dt = 1 \tag{1.21}$$

Ta có:

$$\left|\int\limits_0^{\frac{1}{2}} x_0(t)\,dt\right| \leq \int\limits_0^{\frac{1}{2}} |x_0(t)|\,dt \leq \frac{1}{2}$$

$$\left|-\int\limits_{\frac{1}{2}}^0 x_0(t)\,dt\right| \leq \int\limits_{\frac{1}{2}}^0 |-x_0(t)|\,dt \leq \frac{1}{2}$$

Do đó ta có (1.21) khi và chỉ khi

$$\begin{cases} \left|\int\limits_0^{\frac{1}{2}} x_0(t)\,dt\right| = \int\limits_0^{\frac{1}{2}} |x_0(t)|\,dt = \dfrac{1}{2} \\ \left|-\int\limits_{\frac{1}{2}}^{0} x_0(t)\,dt\right| = \int\limits_{\frac{1}{2}}^{0} |-x_0(t)|\,dt = \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow x_0(t) = \begin{cases} 1 & \text{với mọi } t \in \left[0, \dfrac{1}{2}\right] \\ -1 & \text{với mọi } t \in \left[\dfrac{1}{2}, 1\right]. \end{cases}$$

Điều này mâu thuẫn với giả thiết $x_0 \in S'(0,1)$, mâu thuẫn chứng tỏ f không đạt cận trên đúng trên $S'(0,1)$. $\square$

49. Bạn đọc tự giải.

50. Dễ dàng chứng minh được E là một tập hợp đóng.

Tính bị chặn: Xét hàm $x_0(t) = 1, \forall t \in [0,1]$, $x_0 \in E$. Với mọi $x \in E$ ta có:

$$|x(t) - x_0(t)| = |x(t) - 1| \leq |x(t)| + 1 \leq 2, \forall t \in [0,1]$$

$$\Rightarrow \max_{0 \leq t \leq 1} |x(t) - x_0(t)| \leq 2$$

$$\Rightarrow d(x, x_0) \leq 2, \forall x \in E \Rightarrow E \subset S'(x_0, 2)$$

Vậy E là tập hợp bị chặn.

E không là tập hợp compak. Thật vậy, xét dãy $\{x_n\} \subset E$ xác định như sau:

$$x_n(t) = \begin{cases} 1 & \text{nếu } 0 \le t < \frac{1}{2} - \frac{1}{n} \\ -n(n+1)t + \frac{n(n-1)}{2} & \text{nếu } \frac{1}{2} - \frac{1}{n} \le t \le \frac{1}{2} - \frac{1}{n+1} \\ 0 & \text{nếu } \frac{1}{2} - \frac{1}{n+1} < t < \frac{1}{2} \\ 2t - 1 & \text{nếu } \frac{1}{2} \le t \le 1 \end{cases}$$

Dễ thấy $x_n(t)$ liên tục trên $[0,1]$ và $\max\limits_{0\le t\le 1} |x_n(t) - x_m(t)| = 1$, $\forall m > n$. Do đó $\{x_n\}$ không chứa một dãy con nào hội tụ, suy ra E không là tập hợp compak. □

51. ***Tiêu chuẩn compak trong không gian $\mathbb{R}^k, k \ge 1$***

Một tập hợp trong không gian $\mathbb{R}^k, k \ge 1$ là tập hợp compak khi và chỉ khi nó là tập hợp đóng và bị chặn.

Tiêu chuẩn compak trong không gian l_2

Giả sử $A = \{x \in l_2, x = (x_i) : |x_i| \le c_i, (i \ge 1)\}$, trong đó $c_i > 0 (i \ge 1)$ cho trước. Khi đó A là tập hợp compak tương đối khi và chỉ khi chuỗi $\sum\limits_{i=1}^{\infty} c_i^2$ hội tụ.

Tiêu chuẩn compak trong không gian metric rời rạc

Một tập hợp A trong không gian metric rời rạc là tập hợp compak khi và chỉ khi nó gồm hữu hạn phần tử.

Tiêu chuẩn compak trong không gian $C_{[a,b]}$

Để thiết lập tiêu chuẩn compak trong không gian $C_{[a,b]}$, trước hết ta định nghĩa khái niệm bị chặn đều và liên tục đồng bậc.

Tập $A \subset C_{[a,b]}$ được gọi là bị chặn đều, nếu tồn tại hằng số $c > 0$ sao cho:

$$\forall x \in A, \forall t \in [a,b] \Rightarrow |x(t)| \le c.$$

Tập $A \subset C_{[a,b]}$ được gọi là liên tục đồng bậc, nếu với mọi $\varepsilon > 0$, tồn tại $\delta > 0$ sao cho:

$$\forall t, t' \in [a,b], |t - t'| < \delta; \forall x \in A \Rightarrow |x(t) - x(t')| < \varepsilon.$$

Tiêu chuẩn compak

Một tập hợp trong không gian $C_{[a,b]}$ là tập hợp compak tương đối khi và chỉ khi nó bị chặn đều và liên tục đồng bậc.

Việc chứng minh các tiêu chuẩn này xin mời bạn đọc tự giải. □

Chương 2

Không gian định chuẩn

2.1 Tóm tắt lý thuyết

2.1.1 Kiến thức mở đầu về không gian định chuẩn

1. Định nghĩa không gian định chuẩn

Định nghĩa 2.1.1. *Không gian định chuẩn (hay không gian tuyến tính định chuẩn) là một không gian tuyến tính X trên trường P (P là trường số thực $\mathbb{R}$ hay trường số phức $\mathbb{C}$) cùng với một ánh xạ từ X vào tập hợp số thực, kí hiệu $\|\cdot\|$ (đọc là chuẩn), thỏa mãn các tiên đề sau:*

1) $(\forall x \in X)\ \|x\| \geq 0,$
$\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = \theta$ *(kí hiệu phần tử không của X);*

2) $(\forall x \in X)(\forall \alpha \in P)\ \|\alpha x\| = |\alpha|.\|x\|;$

3) $(\forall x, y \in X)\ \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ *(bất đẳng thức tam giác).*

Số $\|x\|$ gọi là chuẩn của vectơ x. Ta cũng kí hiệu không gian định chuẩn là X. Các tiên đề 1), 2), 3) gọi là hệ tiên đề chuẩn.

Định lí 2.1.1. *Cho không gian định chuẩn X. Đối với hai vectơ bất kì $x, y \in X$ ta đặt*

$$d(x, y) = \|x - y\|.$$

Khi đó d là một metric trên X. Vì vậy, mọi không gian định chuẩn đều là không gian metric.

Định nghĩa 2.1.2. *Dãy điểm (x_n) của không gian định chuẩn X gọi là hội tụ tới điểm $x \in X$, nếu $\lim\limits_{n\to\infty} \|x_n - x\| = 0$ và kí hiệu $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$ hay $x_n \to x$ $(n \to \infty)$.*

Từ định nghĩa dễ dàng suy ra một số tính chất đơn giản:

1) Chuẩn $\|\cdot\|$ là một hàm giá trị thực liên tục theo biến x;

2) Nếu dãy điểm (x_n) hội tụ tới x trong không gian định chuẩn X, thì dãy chuẩn $(\|x_n\|)$ bị chặn;

3) Nếu dãy điểm (x_n) hội tụ tới x , dãy điểm (y_n) hội tụ tới y trong không gian định chuẩn X, dãy số (α_n) hội tụ tới α, thì

$$x_n + y_n \to x + y \ (n \to \infty), \quad \alpha_n x_n \to \alpha x \ (n \to \infty).$$

Định nghĩa 2.1.3. *Dãy điểm (x_n) của không gian định chuẩn X gọi là dãy cơ bản, nếu*

$$\lim_{n,m\to\infty} \|x_n - x_m\| = 0.$$

Không gian định chuẩn X gọi là không gian Banach, nếu mọi dãy cơ bản trong X đều hội tụ.

2. Chuẩn tương đương

Định nghĩa 2.1.4. *Cho không gian tuyến tính X và $\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2$ là hai chuẩn trên X. Hai chuẩn $\|\cdot\|_1$ và $\|\cdot\|_2$ gọi là tương đương, nếu tồn tại hai số dương α, β sao cho*

$$(\forall x \in X)\ \alpha\|x\|_1 \le \|x\|_2 \le \beta\|x\|_1.$$

Định lí 2.1.2. *Hai chuẩn* $\|\cdot\|_1$ *và* $\|\cdot\|_2$ *trên không gian tuyến tính* X *là tương đương khi và chỉ khi hai chuẩn đó sinh cùng một tôpô trên* X.

3. Chuỗi trong không gian định chuẩn

Định lí 2.1.3. *Không gian định chuẩn* X *là không gian Banach khi và chỉ khi trong không gian* X *mọi chuỗi hội tụ tuyệt đối đều hội tụ.*

4. Không gian con

Định nghĩa 2.1.5. *Cho không gian định chuẩn* X *và tập hợp* $X_0 \subset X$, $X_0 \neq \phi$. *Tập hợp* X_0 *gọi là không gian định chuẩn con (hay gọi đơn giản là không gian con) của không gian* X, *nếu* X_0 *là không gian tuyến tính con của* X *và chuẩn trên* X_0 *là chuẩn trên* X, *nếu* X_0 *đồng thời là tập hợp đóng trong không gian* X, *thì* X_0 *gọi là không gian định chuẩn con đóng của không gian* X.

Định lí 2.1.4. *Nếu* X_0 *là không gian định chuẩn con đóng của không gian định chuẩn* X *và* $X_0 \neq X$, *thì với mọi số dương* ε *cho trước tùy ý, tồn tại phần tử* $x \in X$, $\|x\| = 1$, *sao cho* $d(x, X_0) = \inf\limits_{y \in X_0} \|x - y\| > 1 - \varepsilon$.

5. Không gian thương

Định nghĩa 2.1.6. *Cho không gian định chuẩn* X *và không gian định chuẩn con đóng* $X_0 \subset X$, X/X_0 *là không gian tuyến tính thương theo không gian tuyến tính con* X_0. *Ta gọi là không gian định chuẩn thương của không gian định chuẩn* X *theo không gian con đóng* $X_0 \subset X$ *không gian tuyến tính thương* X/X_0 *cùng với ánh xạ*

$$(\forall \widetilde{x} \in X/X_0)\ \|\widetilde{x}\| = \inf_{x \in \widetilde{x}} \|x\|.$$

Không gian định chuẩn thương cũng kí hiệu là X/X_0.

2.1.2 Toán tử tuyến tính bị chặn

1. Các định nghĩa

Định nghĩa 2.1.7. *Cho các không gian tuyến tính X và Y trên trường P ($P = \mathbb{R}$ hoặc $P = \mathbb{C}$). Ánh xạ A từ không gian X vào không gian Y gọi là tuyến tính nếu ánh xạ A thỏa mãn các điều kiện:*

1) $(\forall x', x'' \in X)\ A(x' + x'') = Ax' + Ax''$;

2) $(\forall x \in X)(\forall \alpha \in P)\ A\alpha x = \alpha A x$.

Ta thường gọi ánh xạ tuyến tính là toán tử tuyến tính. Khi toán tử A thỏa mãn điều kiện 1) thì A gọi là toán tử cộng tính, còn khi A thỏa mãn điều kiện 2) thì A gọi là toán tử thuần nhất. Khi $Y = P$ thì toán tử tuyến tính thường gọi là phiếm hàm tuyến tính.

Định nghĩa 2.1.8. *Cho hai không gian định chuẩn X và Y. Toán tử tuyến tính A từ không gian X vào không gian Y gọi là bị chặn, nếu*

$$(\exists C \geq 0)(\forall x \in X)\ \|Ax\| \leq C\|x\| \tag{2.1}$$

Định nghĩa 2.1.9. *Cho toán tử tuyến tính bị chặn từ không gian định chuẩn X vào không gian định chuẩn Y. Hằng số $C \geq 0$ nhỏ nhất thỏa mãn hệ thức (2.1) gọi là chuẩn của toán tử A và kí hiệu là $\|A\|$.*

Từ định nghĩa dễ dàng nhận thấy, chuẩn của toán tử A có các tính chất:

1) $(\forall x \in X)\ \|Ax\| \leq \|A\|.\|x\|$;

2) $(\forall \varepsilon > 0)(\exists x_\varepsilon \in X)\ (\|A\| - \varepsilon)\|x_\varepsilon\| < \|Ax_\varepsilon\|$.

2. Một số định lý quan trọng về toán tử tuyến tính bị chặn trên không gian định chuẩn

Định lí 2.1.5. *Cho toán tử tuyến tính từ không gian định chuẩn X vào không gian định chuẩn Y. Ba mệnh đề sau đây tương đương:*

1) A liên tục;

2) A liên tục tại điểm nào đó $x_0 \in X$;

3) A bị chặn.

Định lí 2.1.6. *Cho toán tử tuyến tính A từ không gian định chuẩn X vào không gian định chuẩn Y. Nếu toán tử A bị chặn, thì*

$$\|A\| = \sup_{\|x\|\leq 1} \|Ax\| \quad hay \quad \|A\| = \sup_{\|x\|=1} \|Ax\|.$$

Định lí 2.1.7. *Toán tử tuyến tính A ánh xạ không gian định chuẩn X lên không gian định chuẩn Y, có toán tử ngược liên tục A^{-1} khi và chỉ khi*

$$(\exists \alpha > 0)(\forall x \in X)\ \|Ax\| \geq \alpha\|x\|.$$

Khi đó $\|A^{-1}\| \leq \dfrac{1}{\alpha}$.

3. Sự đồng phôi tuyến tính giữa các không gian hữu hạn chiều

Định nghĩa 2.1.10. *Cho hai không gian định chuẩn X và Y. Nếu toán tử tuyến tính liên tục A ánh xạ không gian X lên không gian Y có toán tử ngược liên tục A^{-1}, thì toán tử A gọi là phép đồng phôi tuyến tính từ không gian X lên không gian Y.*

Định nghĩa 2.1.11. *Hai không gian định chuẩn gọi là đồng phôi tuyến tính, nếu tồn tại phép đồng phôi tuyến tính từ không gian này lên không gian kia.*

Định lí 2.1.8. *Mọi không gian định chuẩn hữu hạn chiều có cùng số chiều đều đồng phôi tuyến tính.*

4. Không gian các toán tử tuyến tính bị chặn

Kí hiệu $I(X,Y)$ là tập hợp tất cả các toán tử tuyến tính bị chặn từ không gian định chuẩn X vào không gian định chuẩn Y. Với hai toán tử bất kì $A, B \in I(X,Y)$ và với số bất kì $\alpha \in P$ ta đặt:

1) $(A+B)x = Ax + Bx$, $\forall x \in X$;

2) $(\alpha A)x = \alpha.Ax$, $\forall x \in X$.

Dễ dàng kiểm tra các toán tử $A+B \in I(X,Y), \alpha A \in I(X,Y)$ và hai phép toán trên thỏa mãn hệ tiên đề không gian tuyến tính. Do đó tập hợp $I(X,Y)$ cùng với hai phép toán trên lập thành không gian tuyến tính trên trường P.

Với toán tử A bất kì $A \in I(X,Y)$ ta đặt

$$\|A\| = \sup_{\|x\|=1} \|Ax\| \tag{2.2}$$

Dễ dàng kiểm tra cộng thức (2.2) xác định một chuẩn và không gian $I(X,Y)$ trở thành không gian định chuẩn. Không gian định chuẩn $I(X,Y)$ gọi là không gian toán tử tuyến tính bị chặn.

Sự hội tụ trong không gian định chuẩn $I(X,Y)$ gọi là sự hội tụ đều của dãy toán tử tuyến tính bị chặn. Dãy toán tử $(A_n) \subset I(X,Y)$ gọi là hội tụ từng điểm tới toán tử $A \in I(X,Y)$, nếu $\|A_n x - Ax\| \to 0$ $(n \to \infty)$ với mỗi $x \in X$.

Định lí 2.1.9. *Nếu Y là không gian Banach, thì $I(X,Y)$ là không gian Banach.*

2.1.3 Một số nguyên lý của giải tích hàm

1. Nguyên lý ánh xạ mở Banach

Định nghĩa 2.1.12. *Cho ánh xạ A ánh xạ không gian metric $M_1 = (X, d_1)$ vào không gian metric $M_2 = (Y, d_2)$. Ánh xạ A gọi là mở tại điểm $x_0 \in X$ nếu ánh xạ A biến mỗi lân cận của điểm x_0 trong M_1 thành lân cận của điểm Ax_0 trong M_2. Ánh xạ A gọi là mở, nếu ánh xạ A biến mỗi tập hợp mở trong M_1 thành tập hợp mở trong M_2.*

Định lí 2.1.10. ***Nguyên lý ánh xạ mở Banach***

Nếu A là toán tử tuyến tính liên tục ánh xạ không gian Banach X lên không gian Banach Y, thì A là ánh xạ mở.

2. Nguyên lý đồ thị đóng Banach

Định nghĩa 2.1.13. *Cho hai không gian định chuẩn X, Y và ánh xạ A từ không gian X vào không gian Y. Ta gọi đồ thị của toán tử A, kí hiệu $G(A)$, là tập hợp*

$$G(A) = \{(x, Ax) : x \in X\} \subset X \times Y.$$

Nếu đồ thị $G(A)$ của toán tử A là tập hợp đóng trong không gian định chuẩn tích $X \times Y$, thì toán tử A gọi là toán tử đóng.

Định lí 2.1.11. ***Nguyên lý đồ thị đóng Banach***

Cho toán tử tuyến tính A ánh xạ không gian Banach X vào không gian Banach Y. Toán tử A liên tục khi và chỉ khi A là toán tử đóng.

3. Nguyên lý bị chặn đều Banach-Steinhaus

Định nghĩa 2.1.14. *Cho họ $(A_t)_{t\in T}$ gồm các toán tử tuyến tính liên tục A_t ánh xạ không gian định chuẩn X vào không gian định chuẩn*

Y, trong đó tập hợp chỉ số T có lực lượng nào đấy. Họ $(A_t)_{t\in T}$ gọi là bị chặn từng điểm, nếu với mỗi $x \in X$ thì tập hợp $(A_t x)_{t\in T}$ bị chặn. Họ $(A_t)_{t\in T}$ gọi là bị chặn đều nếu tập hợp $(\|A_t\|)_{t\in T}$ bị chặn.

Định lí 2.1.12. ***Nguyên lý bị chặn đều Banach-Steinhaus***

Nếu họ $(A_t)_{t\in T}$ các toán tử tuyến tính liên tục ánh xạ không gian Banach X vào không gian định chuẩn Y bị chặn từng điểm, thì họ đó bị chặn đều.

4. Nguyên lý thác triển Hahn-Banach

Định lí 2.1.13. ***Nguyên lý thác triển Hahn-Banach***

Mọi phiếm hàm tuyến tính liên tục f xác định trên không gian tuyến tính con X_0 của không gian định chuẩn X $(X_0 \neq X)$ đều có thể thác triển lên toàn không gian X với chuẩn không tăng, nghĩa là có thể xây dựng được phiếm hàm tuyến tính liên tục F xác định trên toàn không gian X sao cho:

1) $F(x) = f(x)$ $(\forall x \in X_0)$;

2) $\|F\|_X = \|f\|_{X_0}$.

Từ nguyên lý thác triển Hahn-Banach dễ dàng suy ra:

- Cho không gian định chuẩn X. Với mỗi phần tử khác không $x_0 \in X$ tồn tại một phiếm hàm tuyến tính liên tục f xác định trên toàn không gian X sao cho $f(x_0) = \|x_0\|$ và $\|f\| = 1$.

- Cho Y là không gian tuyến tính con của không gian định chuẩn X và $x_0 \in X$ thỏa mãn điều kiện:

$$d(x_0, Y) = \inf_{y\in Y} \|x_0 - y\| = d > 0.$$

Khi đó tồn tại phiếm hàm tuyến tính liên tục f xác định trên không gian X sao cho:

$$f(y) = 0\ (\forall y \in Y), \quad \|f\| = \frac{1}{d}, \quad f(x_0) = 1.$$

2.1.4 Toán tử compak

Định nghĩa 2.1.15. *Toán tử tuyến tính A ánh xạ không gian định chuẩn X vào không gian định chuẩn Y gọi là toán tử compak, nếu toán tử A ánh xạ tập hợp bị chặn bất kì trong không gian X thành tập hợp compak tương đối trong không gian Y.*

Định lí 2.1.14. *Cho A là toán tử tuyến tính bị chặn ánh xạ không gian định chuẩn X vào không gian định chuẩn Y, B là toán tử tuyến tính bị chặn ánh xạ không gian Y vào không gian định chuẩn Z. Khi đó, nếu một trong hai toán tử A, B là compak thì toán tử tích $B \circ A$ là compak.*

Định lí 2.1.15. *Nếu A và B là hai toán tử compak ánh xạ không gian định chuẩn X vào không gian định chuẩn Y, thì với mọi số α, β, toán tử $\alpha A + \beta B$ là toán tử compak.*

Định lí 2.1.16. *Nếu (A_n) là dãy toán tử compak ánh xạ không gian định chuẩn X vào không gian Banach Y hội tụ tới toán tử A trong không gian $I(X, Y)$, thì A là toán tử compak.*

2.1.5 Không gian liên hợp

1. Không gian liên hợp

Định nghĩa 2.1.16. *Cho không gian định chuẩn X trên trường P ($P = \mathbb{R}$ hay $P = \mathbb{C}$). Ta gọi không gian $I(X, P)$ các phiếm hàm tuyến tính liên tục trên không gian X là không gian liên hợp của không gian X và kí hiệu X^*.*

Không gian liên hợp của không gian X^* gọi là không gian liên hợp thứ hai của không gian X và kí hiệu X^{**}.

Định lí 2.1.17. *Nếu không gian liên hợp X^* của không gian định chuẩn X là tách được, thì không gian X tách được.*

Định lí 2.1.18. *Tồn tại một phép đẳng cự tuyến tính từ không gian định chuẩn X vào không gian liên hợp thứ hai X^{**} của không gian X.*

2. Không gian phản xạ

Định nghĩa 2.1.17. *Không gian định chuẩn X gọi là không gian phản xạ, nếu $X = X^{**}$.*

Định lí 2.1.19. *Không gian con đóng của một không gian phản xạ là không gian phản xạ.*

3. Tôpô yếu

Định nghĩa 2.1.18. *Cho không gian định chuẩn X. Dãy $(x_n) \subset X$ gọi là hội tụ yếu tới phần tử $x \in X$ nếu với mọi lân cận yếu U của x tìm được số nguyên dương n_0 sao cho với mọi $n \geq n_0$ thì $x_n \in U$, kí hiệu $x_n \xrightarrow{\text{yếu}} x$.*

Định lí 2.1.20. *Cho không gian định chuẩn X. Dãy điểm $(x_n) \subset X$ hội tụ yếu tới điểm x khi và chỉ khi $f(x_n) \to f(x)$ với mọi $f \in X^*$.*

Định lí 2.1.21. *Cho không gian định chuẩn X. Nếu dãy điểm $(x_n) \subset X$ hội tụ yếu thì dãy đó bị chặn.*

2.1.6 Không gian $L_p(E, \mu)$

Giả sử E là một tập hợp nào đấy, $\mathcal{F}$ là một σ- đại số các tập hợp con của E, μ là một độ đo trên $\mathcal{F}$. $L_p(E, \mu)$ là tập hợp tất cả hàm số $x(t)$

đo được theo độ đo μ trên E sao cho tích phân sau hội tụ

$$\int\limits_E |x(t)|^p \, d\mu, \text{ với } p \geq 1.$$

Bất đẳng thức Holder

$$\int\limits_E |x(t).y(t)| \, d\mu \leq \left(\int\limits_E |x(t)|^p \, d\mu \right)^{\frac{1}{p}} . \left(\int\limits_E |y(t)|^q \, d\mu \right)^{\frac{1}{q}}$$

với mọi $x, y \in L_p(E, \mu), \dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$ với $p > 1, q > 1$.

Bất đẳng thức Mincovxki

$$\left(\int\limits_E |x(t) + y(t)|^p \, d\mu \right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\int\limits_E |x(t)|^p \, d\mu \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int\limits_E |y(t)|^p \, d\mu \right)^{\frac{1}{p}}$$

với mọi $x, y \in L_p(E, \mu), p \geq 1$.

Định lí 2.1.22. *Không gian $L_p(E, \mu)$ là không gian Banach.*

2.2 Đề bài tập

1. Tập hợp A của không gian định chuẩn X gọi là tập hợp lồi nếu $x, y \in A$ thì $\alpha x + (1-\alpha)y \in A$ $(\forall \alpha \in [0;1])$. Chứng minh tính lồi của hình cầu đơn vị $S[\theta, 1] = \{x \in X : \|x\| \leq 1\}$ tương đương với tiên đề tam giác về chuẩn $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$ $(\forall x, y \in X)$.

2. Hãy chuẩn hoá các không gian metric nêu ở các bài tập hợp 2, 3, 4, 5, 6, 9 trong chương 1. Chứng minh các không gian định chuẩn đó đều là không gian Banach.

3. Cho E^n $(n \in \mathbb{N}^*)$ là một không gian định chuẩn n chiều. Chứng minh dãy điểm $x^{(m)} = (x_1^{(m)}, x_2^{(m)}, \ldots, x_n^{(m)}) \in E^n, (m = 1, 2, \ldots)$ hội tụ tới phần tử $\theta = (0, 0, \ldots, 0)$ (n số không) khi và chỉ khi với mỗi $j = 1, 2, ..., n$ dãy thành phần toạ độ $(x_j^{(m)})$ hội tụ tới 0.

4. Cho không gian tuyến tính $D_m[a;b]$ $(m \in \mathbb{N}^*)$ gồm các hàm số xác định và có đạo hàm liên tục đến cấp m trên đoạn $[a;b]$. Chuẩn của mỗi hàm số $x(t) \in D_m[a;b]$ cho bằng công thức

$$\|x\| = \sum_{k=0}^{m} \max_{a \leq t \leq b} |x^k(t)|.$$

Chứng minh $D_m[a;b]$ là không gian Banach.

5. Chứng minh trong không gian định chuẩn, bao đóng của hình cầu mở là hình cầu đóng cùng tâm và bán kính, phần trong của hình cầu đóng là hình cầu mở cùng tâm và bán kính.

6. Cho X là một không gian định chuẩn, X_0 là không gian con của X, $X_0 \neq X$, sao cho cùng với chuẩn trên X không gian con X_0 là không gian Banach. Chứng minh nếu không gian định chuẩn thương X/X_0 là không gian Banach thì X là không gian Banach.

7. Cho A, B là hai tập hợp con của không gian định chuẩn X. Chứng minh:

a) Nếu tập hợp A mở thì tập hợp $A+B = \{x+y : x \in A, y \in B\}$ mở.

b) Nếu tập hợp A compak, tập hợp B đóng thì tập hợp $A+B$ đóng.

8. Kí hiệu K là một tập hợp con của không gian l_1 gồm tất cả các phần tử $x = (x_n) \in l_1$ sao cho chỉ có một số hữu hạn thành phần toạ độ $x_n \neq 0$. Chứng minh K là tập hợp phạm trù thứ nhất trong l_1.

9. Cho X là không gian Banach và F là tập hợp con đóng trong không gian X thoả mãn điều kiện: Với mỗi $x \in X$ tìm được số dương c (nói chung phụ thuộc x) sao cho tập hợp $\{tx : 0 \leq t \leq c\} \subset F$.

a) Chứng minh tập hợp F chứa một hình cầu nào đấy.

b) Bằng ví dụ (chẳng hạn $X = \mathbb{R}^2$) hãy chứng tỏ tập hợp F không nhất thiết phải chứa một hình cầu có tâm tại phần tử không.

10. Cho toán tử A xác định bằng hệ thức

$$Ax(t) = \alpha(t)x(t), \ x \in C_{[0;1]},$$

trong đó hàm số $\alpha(t)$ đã cho xác định trên đoạn $[0; 1]$.

Tìm điều kiện cần và đủ đối với hàm số $\alpha(t)$ để toán tử A ánh xạ không gian $C_{[0;1]}$ vào chính nó. Với điều kiện tìm được đối với hàm số $\alpha(t)$ hãy chứng minh A là toán tử tuyến tính bị chặn và tìm $\|A\|$.

11. Chứng minh các toán tử dưới đây đều là các toán tử tuyến tính liên tục ánh xạ $C_{[0;1]}$ vào chính nó:

a) $Ax(t) = \displaystyle\int_0^1 e^{s-t}x(t)\,dt, \ x \in C_{[0;1]}, 0 \leq s \leq 1.$

b) $Ax(t) = \displaystyle\int_0^1 \sin\pi(s-t)x(t)\,dt, \ x \in C_{[0;1]}, 0 \leq s \leq 1.$

Tìm chuẩn của các toán tử kể trên.

12. Chứng minh các phiếm hàm cho dưới đây đều là các phiếm hàm tuyến tính liên tục trên không gian $C_{[0;1]}$:

a) $f(x) = \int_0^1 t^{\frac{1}{3}} x(t)\,dt;$

b) $f(x) = \int_0^1 x(t) \sin t\,dt.$

Tìm chuẩn của các phiếm hàm đó.

13. Cho hàm số $\alpha(t) \in C_{[a;b]}$. Chứng minh phiếm hàm

$$f(x) = \int_a^b \alpha(t)x(t)\,dt,\ x \in C_{[a;b]}$$

tuyến tính liên tục trên $C_{[a;b]}$. Tìm $\|f\|$.

14. Chứng minh phiếm hàm $F(x) = x'(t_0), t_0$ là số cố định thuộc đoạn $[0;1], x \in D_1[0;1]$ là phiếm hàm tuyến tính không bị chặn trên $C_{[0;1]}$, nhưng bị chặn trên $D_1[0;1]$. Tìm $\|F\|$ trên $D_1[0;1]$.

15. Trên không gian định chuẩn c_0 các dãy số thực hội tụ tới 0, xét tính tuyến tính, bị chặn của các phiếm hàm cho bằng công thức dưới đây:

a) $f(x) = x_1,\ \forall x = (x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots) \in c_0;$

b) $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n}{2^n},\ \forall x = (x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots) \in c_0;$

c) $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n,\ \forall x = (x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots) \in c_0.$

16. Cho phiếm hàm tuyến tính f trên không gian định chuẩn X. Chứng minh nếu f bị chặn trên hình cầu $S = \{x \in X : \|x-a\| \le r\}$ thì f bị chặn.

17. Cho hai không gian định chuẩn X và Y trên cùng trường P (P là trường số thực hoặc trường số phức). Phiếm hàm

$$f : X \times Y \to P$$

xác định trên không gian tích $X \times Y$ gọi là song tuyến tính nếu f thoả mãn các điều kiện:

1) $f(\alpha x + \beta x', y) = \alpha f(x, y) + \beta f(x', y)$;
2) $f(x, \lambda y + \mu y') = \lambda f(x, y) + \mu f(x, y')$,

$\forall x, x' \in X,\ \forall y, y' \in Y,\ \forall \alpha, \beta, \lambda, \mu \in P$

a) Chứng minh các mệnh đề sau đây tương đương:
   i) f liên tục trên toàn không gian tích;
   ii) f liên tục tại điểm $(\theta, \theta) \in X \times Y$;
   iii) Tồn tại số dương C sao cho

$$|f(x, y)| \leq C\|x\|\|y\|,\ \forall x \in X, \forall y \in Y.$$

b) Phiếm hàm f gọi là liên tụ theo từng biến nếu với mỗi x cố định tuỳ ý $f(x, \cdot) = f_x$ liên tục theo biến $y \in Y$ và với mỗi y cố định tuỳ ý $f(\cdot, y) = f_y$ liên tục theo biến $x \in X$. Chứng minh nếu phiếm hàm f liên tục thì f liên tục theo từng biến.

c) Giả sử có ít nhất một trong hai không gian X và Y là không gian Banach. Chứng minh nếu f liên tục theo từng biến thì nó liên tục.

18. Cho hai chuẩn $\|\cdot\|_1$ và $\|\cdot\|_2$ trên không gian tuyến tính X thoả mãn các điều kiện: Không gian tuyến tính X cùng với mỗi chuẩn đều là các không gian Banach và khi $\|\cdot\|_1 \to 0$ thì $\|\cdot\|_2 \to 0$ với mọi dãy điểm $(x_n) \subset X$. Chứng minh hai chuẩn đã cho là tương đương.

19. Cho E và F là hai không gian con đóng của không gian Banach X thoả mãn điều kiện: Với phần tử bất kì $x \in X$ đều có biểu diễn duy nhất

$$x = u + v,\ u \in E, v \in F.$$

Chứng minh các toán tử chiếu

$$X \ni x \mapsto u \in E, \; X \ni x \mapsto v \in F$$

đều liên tục.

20. Cho hai không gian Banach X và Y, toán tử tuyến tính A từ không gian X vào không gian Y thoả mãn các điều kiện: với mọi dãy điểm $(x_n) \subset X$ hội tụ tới không và với mọi phiếm hàm tuyến tính liên tục g trên không gian Y đều có dãy $(g(Ax_n))$ hội tụ tới không. Chứng minh A liên tục.

21. Cho dãy toán tử tuyến tính liên tục A_n $(n = 1, 2, \dots)$ từ không gian Banach X vào không gian Banach Y. Chứng minh dãy toán tử (A_n) hội tụ từng điểm tới toán tử tuyến tính liên tục A khi và chỉ khi dãy toán tử (A_n) thoả mãn các điều kiện:

1) $(\exists C > 0)(\forall n = 1, 2, \dots)\ \|A_n\| \leq C$;

2) Trên tập hợp E trù mật khắp nơi trong không gian X, với mỗi $x \in E$ dãy điểm (Ax_n) là dãy cơ bản trong không gian Y.

22. Cho X là không gian Banach, I là toán tử đồng nhất trên không gian X, A là toán tử tuyến tính bị chặn ánh xạ không gian X vào chính nó sao cho $\|A\| \leq q < 1$. Chứng minh toán tử ngược $(I - A)^{-1}$ tồn tại, bị chặn và biểu diễn dưới dạng

$$(I - A)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} A^k.$$

23. Chứng minh mọi toán tử tuyến tính bị chặn ánh xạ không gian định chuẩn hữu hạn chiều X vào không gian định chuẩn Y đều là toán tử compak.

24. Toán tử tuyến tính bị chặn A ánh xạ không gian định chuẩn X vào không gian định chuẩn Y gọi là toán tử hạng hữu hạn nếu không gian Y hữu hạn chiều. Chứng minh toán tử A có thể biểu diễn dưới dạng:

$$Ax = \sum_{k=1}^{n} f_k(x) e_k, \ x \in X,$$

trong đó e_k $(k = 1, 2, \ldots, n)$ là các vectơ độc lập tuyến tính trong không gian Y, $f_k \in X^*$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$.

25. Chứng minh nếu A là toán tử compak ánh xạ không gian l_2 vào chính nó thì tồn tại một dãy toán tử hạng hữu hạn hội tụ tới toán tử A trong không gian $I(l_2, l_2)$.

26. Chứng minh toán tử compak ánh xạ dãy hội tụ yếu trong không gian Banach X thành dãy hội tụ mạnh (hội tụ theo chuẩn) trong không gian Banach Y.

27. Cho toán tử A xác định bởi công thức

$$Ax(t) = \alpha(t)x(t), \ x \in C_{[0;1]},$$

trong đó hàm số đã cho $\alpha(t) \in C_{[0;1]}$. Toán tử A có phải là toán tử compak hay không? Vì sao?

28. Tìm các không gian liên hợp của các không gian $\mathbb{R}^n, l_2$, $l_p\,(p > 1), c_0$.

29. Chứng minh trong không gian Eukleides $\mathbb{R}^n$, sự hội tụ yếu trùng với sự hội tụ mạnh.

30. Chứng minh trong không gian l_1, một dãy véctơ hội tụ yếu thì dãy đó hội tụ theo toạ độ, đồng thời cũng hội tụ mạnh.

31. Cho các toán tử xác định bởi công thức

$$Ax(s) = \int_a^b K(s,t)x(t)\,dt, \ x \in C_{[a;b]},$$

trong đó $K(s,t)$ là hàm số liên tục trên hình vuông

$$D = \{a \le s \le b, a \le t \le b\}$$

$$A_n x(s) = \int_a^b P_n(s,t)x(t)\,dt,\ x \in C_{[a;b]},$$

trong đó $P_n(s,t)$ là đa thức hai biến số sao cho

$$\max_D |K(s,t) - P_n(s,t)| \to 0,\ (n \to \infty).$$

Hãy nêu đặc tính sự hội tụ của dãy toán tử (A_n) tới toán tử A.

32. Cho hai toán tử tích phân

$$(Ax)(s) = \int_a^b K(s,t)x(t)\,dt,\ x(t) \in C_{[a;b]},$$

$$(Bx)(s) = \int_a^b H(s,t)x(t)\,dt,\ x(t) \in C_{[a;b]}.$$

Chứng minh toán tử $A \circ B$ cũng là toán tử tích phân với hạt nhân

$$R(s,t) = \int_a^b H(s,u)K(u,t)\,du.$$

2.3 Bài tập nâng cao

33. Cho E và F là hai không gian tuyến tính con đóng của không gian định chuẩn X. $E+F = \{u+v : u \in E, v \in F\}$ có là không gian tuyến tính con đóng của không gian X không? Vì sao?

34. Tìm dạng tổng quát của các phiếm hàm tuyến tính liên tục trên các không gian định chuẩn $E^n, c_0, l_1, l_p\ (p>1), L_p[0;1]\ (p>1)$.

35. Cho p là một hàm giá trị thực không âm trên không gian tuyến tính phức X thoả mãn điều kiện:

$$p(x+y) \le p(x) + p(y), p(\lambda x) = |\lambda| p(x),\ \forall x, y \in X,\ \forall \lambda \in P,$$

f là phiếm hàm tuyến tính trên không gian tuyến tính con $X_0 \subset X$.

Chứng minh tồn tại phiếm hàm tuyến tính F xác định trên không gian X sao cho:

$$|F(x)| \leq p(x)\ (\forall x \in X), \quad F(x) = f(x)\ (\forall x \in X_0).$$

36. Cho X là không gian định chuẩn thực, A, B là hai tập hợp con lồi không giao nhau của không gian X. Chứng minh:

a) Nếu tập hợp A mở thì có một phiếm hàm $f \in X^*$ sao cho $f(x) < \alpha \leq f(y)$ ($\forall x \in A$, $\forall y \in B$, α là một số thực nào đấy);

b) Nếu A là tập hợp compak và B là tập hợp đóng thì có một phiếm hàm $f \in X^*$ sao cho $f(x) < \alpha_1 < \alpha_2 < f(y)$, ($\forall x \in A$, $\forall y \in B$, α_1, α_2 đã cho).

37. Cho hai toán tử tuyến tính bị chặn A, B ánh xạ không gian định chuẩn X vào chính nó sao cho toán tử $A \circ B$ là compak. Có nhất thiết một trong hai toán tử A, B là compak hay không? Vì sao?

38. Hãy xây dựng thí dụ toán tử A không compak nhưng toán tử $A^2 = A \circ A$ là toán tử compak.

39. Chứng minh trong không gian $L_p(E, \mu)$ thực $(1 < p < \infty)$, dãy phần tử (x_n) hội tụ theo chuẩn tới phần tử x khi và chỉ khi dãy đó hội tụ yếu và dãy chuẩn $(\|x_n\|)$ hội tụ tới $\|x\|$.

2.4 Hướng dẫn giải

1. $\Rightarrow$) Với mọi $x, y \in X$, nếu $x = \theta$ hoặc $y = \theta$ thì ta có ngay điều phải chứng minh.

Xét $x \neq \theta, y \neq \theta$ thế thì $\dfrac{x}{\|x\|}$ và $\dfrac{y}{\|y\|} \in S[\theta, 1]$

$$\Rightarrow \alpha\frac{x}{\|x\|} + (1-\alpha)\frac{y}{\|y\|} \in S[\theta, 1], \forall\alpha \in [0; 1]$$

Chọn $\alpha = \dfrac{\|x\|}{\|x\| + \|y\|} \in S[0; 1]$, ta có $1 - \alpha = \dfrac{\|y\|}{\|x\| + \|y\|}$ nên:

$$\frac{\|x\|}{\|x\| + \|y\|} \cdot \frac{x}{\|x\|} + \frac{\|y\|}{\|x\| + \|y\|} \cdot \frac{y}{\|y\|} \in S[\theta, 1]$$
$$\Rightarrow \frac{x+y}{\|x\| + \|y\|} \in S[\theta, 1]$$
$$\Rightarrow \left\| \frac{x+y}{\|x\| + \|y\|} \right\| \leq 1$$
$$\Rightarrow \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$$

$\Leftarrow$) Với mọi $x, y \in S[\theta, 1]$ và $\forall\alpha \in [0; 1]$, ta có:

$$\|\alpha x + (1-\alpha)y\| \leq \alpha\|x\| + (1-\alpha)\|y\| \leq \alpha + (1-\alpha) = 1$$
$$\Rightarrow \alpha x + (1-\alpha)y \in S[\theta, 1]$$
$$\Rightarrow S[\theta, 1] \text{ là tập hợp lồi}$$

Vậy ta có điều phải chứng minh. □

2. Bạn đọc tự giải.

3. Bạn đọc tự giải.

4. Trong không gian $D_m[a; b]$ xét một dãy cơ bản bất kì $(x_n)_{n=1}^{\infty}$.

Khi đó, $(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N}^*)(\forall n, p \geq n_0)$:

$$\|x_n - x_p\| = \sum_{k=0}^{m} \max_{a\leq t\leq b} \left|x_n^{(k)}(t) - x_p^{(k)}(t)\right| < \frac{\varepsilon}{m+2}$$

Từ đó, với mỗi $k = 0, 1, \dots, m; \forall n, p \geq n_0$:

$$\max_{a\leq t\leq b} \left|x_n^{(k)}(t) - x_p^{(k)}(t)\right| < \frac{\varepsilon}{m+2}$$
$$\Rightarrow \left|x_n^{(k)}(t) - x_p^{(k)}(t)\right| < \frac{\varepsilon}{m+2},\ \forall t \in [a;b] \tag{2.3}$$

Suy ra với mỗi $t \in [a;b]$, dãy $\left(x_n^{(k)}(t)\right)$ là dãy cơ bản trong $\mathbb{R}$ nên nó hội tụ đến số $\varphi_k(t) \in \mathbb{R}$. Từ đó ta nhận được hàm số $\varphi_k(t)$ xác định trên $[a;b]$.

Chuyển (2.3) qua giới hạn khi $p \to \infty$ ta được:

$$\left|x_n^{(k)}(t) - \varphi_k(t)\right| \leq \frac{\varepsilon}{m+2},\ \forall t \in [a;b], \forall n > n_0. \tag{2.4}$$

Suy ra với mỗi $k = 0, 1, 2, \dots$ dãy hàm $\left(x_n^{(k)}(t)\right)$, gồm các hàm liên tục, hội tụ đều đến $\varphi_k(t)$ trên $[a;b]$, do đó $\varphi_k(t)$ liên tục trên $[a;b]$. Hơn nữa, với mỗi $k = 0, 1, 2, \dots$ ta có thể chứng minh được dãy hàm $\left(x_n^{(k)}(t)\right)$ hội tụ đều đến hàm $\varphi_0^{(k)}(t)$ trên $[a;b]$, do đó $\varphi_0^{(k)}(t) = \varphi_k(t)\ \forall t \in [a;b]$ và $\forall k = 1, 2, \dots$.

Từ đó suy ra hàm số $\varphi_0(t)$ có đạo hàm liên tục đến cấp m trên $[a;b]$, nên $\varphi_0(t) \in D_m[a;b]$.

Cuối cùng ta còn phải chứng minh (x_n) hội tụ về φ_0 trong $D_m[a;b]$.

Từ (2.4) suy ra, với mọi $n \geq n_0$:

$$\max_{a\leq t\leq b} \left|x_n^{(k)}(t) - \varphi_0^{(k)}(t)\right| \leq \frac{\varepsilon}{m+2},\ \forall k = 0, 1, \dots, m$$
$$\Rightarrow \sum_{k=0}^{m} \max_{a\leq t\leq b} \left|x_n^{(k)}(t) - \varphi_0^{(k)}(t)\right| < \varepsilon$$
$$\Rightarrow \|x_n - x\| < \varepsilon$$

Từ đó: $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \varphi_0$. Vậy $D_m[a;b]$ là không gian Banach. □

5. Gọi $S(x,r)$, $S[x,r]$ tương ứng là các hình cầu mở, đóng tâm x, bán kính r.

- Ta chứng minh
$$\overline{S(x,r)} = S[x,r] \tag{2.5}$$

Dễ thấy $S(x,r) \subset S[x,r]$ là tập hợp đóng, do đó:
$$\overline{S(x,r)} \subset S[x,r] \tag{2.6}$$

Bao hàm thức ngược lại được chứng minh như sau. Lấy phần tử tùy ý $y \in S[x,r]$, suy ra $\|x-y\| \le r$. Xét dãy $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ xác định bởi: $y_n = \dfrac{1}{n}x + \left(1 - \dfrac{1}{n}\right)y$. Ta có:

$$\begin{aligned}
\|y_n - x\| &= \left\|\frac{1}{n}x + \left(1-\frac{1}{n}\right)y - x\right\| \\
&= \left\|\left(1-\frac{1}{n}\right)(y-x)\right\| \\
&= \left(1-\frac{1}{n}\right)\|y-x\| < r,\ \forall n \ge 1 \\
&\Rightarrow y_n \in S(x,r),\ \forall n \ge 1 \text{ và} \\
\|y_n - y\| &= \left\|\frac{1}{n}x + \left(1-\frac{1}{n}\right)y - y\right\| \\
&= \frac{1}{n}\|x-y\| \le \frac{r}{n} \to 0\ (n\to\infty)
\end{aligned}$$

Từ đó suy ra: $\lim y_n = y$, lại theo chứng minh trên thì $(y_n) \subset S(x,r)$ nên y là điểm dính của $S(x,r)$ tức $y \in S[x,r]$. Vì y là tuỳ ý nên ta có:
$$S[x,r] \subset \overline{S(x,r)} \tag{2.7}$$

Từ (2.6) và (2.7) ta có (2.5).

- Tiếp theo ta chứng minh
$$\operatorname{int}(S[x,r]) = S(x,r) \tag{2.8}$$

Lấy phần tử tùy ý $y \in \operatorname{int}(S[x,r]) \Rightarrow y \in S[x,r] \Rightarrow \|y-x\| \leq r$.

Nếu $\|y-x\| = r$, xét dãy $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ xác định như sau:

$$y_n = -\frac{1}{n}x + \left(1+\frac{1}{n}\right)y,\ \forall n \geq 1$$

Ta có:

$$\|y_n - x\| = \left(1+\frac{1}{n}\right)\|y-x\| > r,\ \forall n \geq 1$$
$$\Rightarrow y_n \notin S[x,r],\ \forall n \geq 1.$$

Nhưng lại có:

$$\|y_n - y\| = \frac{r}{n} \to 0 (n \to \infty) \Rightarrow \lim_{n\to\infty} y_n = y.$$

Điều này mâu thuẫn với việc y là điểm trong của $S[x,r]$.

Do đó phải có: $\|y-x\| < r$ hay $y \in S(x,r)$. Suy ra:

$$\operatorname{int}(S[x,r]) \subset S(x,r) \tag{2.9}$$

Mặt khác, vì $S(x,r) \subset S[x,r]$ và $S(x,r)$ mở nên:

$$S(x,r) \subset \operatorname{int}(S[x,r]) \tag{2.10}$$

Từ (2.9) và (2.10) suy ra (2.8).

Từ (2.5) và (2.8) suy ra điều phải chứng minh. □

6. Giả sử $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ là một dãy cơ bản trong X.

Thế thì với số ε cho trước (nhỏ tuỳ ý):

$$(\exists n_0)(\forall n, m \geq n_0) : \|x_n - x_m\| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Ta cũng có:

$$\|\widetilde{x_n} - \widetilde{x_m}\| \leq \|x_n - x_m\| < \frac{\varepsilon}{3},\ \forall n, m \geq n_0$$

nên $\widetilde{x_n}$ cũng là dãy cơ bản trong không gian Banach X/X_0, do đó nó hội tụ về $\widetilde{x} \in X/X_0$, nghĩa là:

$$(\exists n_1 > n_0)(\forall n \geq n_1) : \|\widetilde{x_n} - \widetilde{x}\| < \frac{\varepsilon}{6}$$
$$\text{hay } \inf_{y \in X_0} \|x_n - x + y\| < \frac{\varepsilon}{6}.$$

Theo tính chất của cận dưới đúng:

$$(\forall n \geq n_1)(\exists y_n \in X_0) : \|x_n - x + y_n\| < \frac{\varepsilon}{6} + \frac{\varepsilon}{6} = \frac{\varepsilon}{3}.$$

Ta sẽ chứng minh $(y_n)_{n=n_1}^{\infty}$ là dãy cơ bản. Thật vậy:

$$\begin{aligned}\|y_n - y_m\| &= \|(x_n - x + y_n) - (x_m - x + y_m) + (x_m - x_n)\| \\ &\leq \|x_n - x + y_n\| + \|x_m - x + y_m\| + \|x_m - x_n\| \\ &< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon,\ \forall n, m \geq n_1\end{aligned}$$

Do đó (y_n) là dãy cơ bản trong không gian Banach X_0 nên nó hội tụ đến $y \in X_0$, tức là:

$$(\exists n_2 > n_1)(\forall n \geq n_2) : \|y_n - y\| < \frac{2\varepsilon}{3}$$

Cuối cùng ta sẽ chứng minh: $x_n \to x - y$ $(n \to \infty)$.

Thật vậy:

$$\begin{aligned}\|x_n - (x - y)\| &= \|(x_n - x + y_n) + (y - y_n)\| \\ &\leq \|x_n - x + y_n\| + \|y - y_n\| \\ &< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{2\varepsilon}{3} = \varepsilon,\ \forall n \geq n_2\end{aligned}$$
$$\text{do đó: } x_n \to x - y \in X (n \to \infty)$$

Vậy X là không gian Banach. □

7. a) Trước hết ta sẽ chứng minh tập hợp $y + A$ mở với mỗi y cố định tùy ý thuộc B:

Lấy $z \in y + A$ suy ra $\exists x \in A : z = y + x$. Vì A mở nên $\exists S(x,r) \subset A$. Ta cần chứng minh $S(z,r) \subset y + A$.

Thật vậy, với mọi $z' \in S(z,r)$ ta có:

$$\begin{aligned}
&\|z' - z\| < r\\
\Rightarrow&\|(z' - y) - x\| < r\\
\Rightarrow&z' - y \in S(x,r)\\
\Rightarrow&x' = z' - y \in A\\
\Rightarrow&z' = y + x' \in y + A\\
\Rightarrow&S(z,r) \subset y + A.
\end{aligned}$$

do đó z là điểm trong của $y + A$. Vì z là bất kì nên $y + A$ mở.

Ta có:

$$A + B = \bigcup_{y \in B} (y + A),$$

nên $A + B$ mở.

b) Lấy dãy $(z_n)_{n=1}^{\infty}$ bất kì của $A + B$ và hội tụ về $z \in X$. Khi đó:

$$(\forall n = 1, 2, \ldots)(\exists x_n \in A, y_n \in B) : z_n = x_n + y_n$$

Ta nhận được hai dãy $(x_n) \subset A$ và $(y_n) \subset B$.

Tập hợp A là compak nên từ (x_n) rút ra được dãy con x_{n_k} hội tụ về $x \in A$.

Rõ ràng ta cũng có z_{n_k} hội tụ về z, do đó

$$y_{n_k} = z_{n_k} - x_{n_k} \to z - x$$

Mà B đóng nên

$$z - x \in B \Rightarrow z = x + (z - x) \in A + B.$$

Từ đây suy ra $A + B$ đóng. $\square$

8. Với mọi $m = 1, 2, \ldots$, đặt:

$$K_m = \{(x_n)_{n=1}^{\infty} \subset l_1 : x_n = 0, \forall n \geq m\}$$

Dễ thấy:

$$K = \bigcup_{m=1}^{\infty} K_m$$

Tiếp theo ta sẽ chứng minh $(\forall m)$ K_m là tập hợp không đâu trù mật, nghĩa là với hình cầu mở cố định tùy ý $S(x, r) \subset l_1$:

$$(\exists S(y, r_1) \subset S(x, r)) : S(y, r_1) \cap K_m = \emptyset.$$

Gọi x_m là toạ độ thứ m của x, luôn tìm được số $y_m \neq 0$: $|x_m - y_m| < r$.

Gọi $y \in l_1$ là phần tử có toạ độ thứ m là y_m, còn các toạ độ khác trùng với toạ độ tương ứng của x. Ta có: $y \in S(x, r)$.

Mặt khác:

$$\lim_{t \to 0^+} t|y_m| = 0,$$

nên

$$(\exists t_0 \in (0; 1)) : t_0|y_m| + |x_m - y_m| < r$$

Hình cầu $S(y, t_0|y_m|) \subset S(x, r)$ vì:

$$\begin{aligned} \|z - x\| &\leq \|z - y\| + \|y - x\| \\ &< t_0|y_m| + |x_m - y_m| \\ &< r, \forall z \in S(y, t_0|y_m|). \end{aligned}$$

Nếu $z \in K_m$ thì $z_m = 0$ và:

$$\|z - y\| \geq |z_m - y_m| = |y_m| > t_0|y_m|$$

$$\Rightarrow S(y, t_0|y_m|) \cap K_m = \emptyset.$$

Vậy K_m là tập hợp không đâu trù mật $(\forall m)$. Từ đây có điều phải chứng minh. □

9. a) Bạn đọc tự giải.

b) Với $X = \mathbb{R}^2$, ta đặt:

$$F = S[(1;0),1] \cup S[(-1;0),1] \cup$$
$$\cup \{x = (x_1;x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1 = 0, -1 \leq x_2 \leq 1\}.$$

Tập hợp F đóng và không chứa bất cứ một hình cầu nào có tâm ở gốc toạ độ . □

10. Tìm điều kiện cho $\alpha(t)$.

Điều kiện cần: Giả sử A là toán tử ánh xạ không gian $C_{[0;1]}$ vào chính nó. Khi đó với mọi $x(t) \in C_{[0;1]}$ ta đều có $Ax(t) \in C_{[0;1]}$. Nói riêng vơí $x_0(t) = 1, \forall t \in [0;1]$ thì:

$$Ax_0(t) = \alpha(t) \in C_{[0;1]}$$

Ngược lại, nếu $\alpha \in C_{[0;1]}$ thì A là toán tử tuyến tính từ $C_{[0;1]}$ vào chính nó.

Vậy điều kiện cần và đủ để A là toán tử ánh xạ không gian $C[0;1]$ vào chính nó là $\alpha(t)$ liên tục trên đoạn $[0;1]$.

Dễ thấy với điều kiện trên của hàm số α thì A là toán tử tuyến tính. Ta chứng minh A bị chặn và tìm chuẩn của nó.

Gọi $M = \max\limits_{t\in[0;1]}|\alpha(t)|$. Với mọi $x(t) \in C_{[0;1]}$ ta có:

$$\begin{aligned}|Ax(t)| &= |\alpha(t)x(t)| = |\alpha(t)||x(t)|\\ &\leq M \max_{t\in[0;1]} |x(t)|, \forall t \in [0;1]\end{aligned}$$
$$\Rightarrow \max_{t\in[0;1]} |Ax(t)| \leq M \max_{t\in[0;1]} |x(t)|$$
$$\Rightarrow \|Ax\| \leq M\|x\|.$$

Bất đẳng thức chứng tỏ A bị chặn và $\|A\| \leq M$. Mặt khác, ta lại có:

$$\|A\| = \sup_{\|x\|=1} \|Ax\| \geq \|Ax_0\| = \max_{t\in[0;1]} |Ax_0(t)| = \max_{t\in[0;1]} |\alpha(t)| = M.$$

Vậy $\|A\| = M$. □

11. a) Với mọi $x \in C_{[0;1]}$, hàm số $f(s,t) = e^{s-t}x(t)$ liên tục trên hình vuông $[0;1] \times [0;1]$. Do đó, theo định lý về tính liên tục của tích phân phụ thuộc tham số, ta có $Ax(s)$ liên tục. Vậy A là ánh xạ từ không gian $C_{[0;1]}$ vào chính nó.

Dễ thấy A là toán tử tuyến tính. Ta sẽ chứng minh A bị chặn và tìm chuẩn của nó. Với mọi $x \in C_{[0;1]}$, ta có:

$$
\begin{aligned}
|Ax(s)| &= \left| \int_0^1 e^{s-t}x(t)\,dt \right| \\
&\leq \int_0^1 e^{s-t}|x(t)|\,dt \\
&\leq \int_0^1 e^{s-t} \left(\max_{t\in[0;1]} |x(t)| \right) dt \\
&= e^s(1-e^{-1}) \max_{t\in[0;1]} |x(t)| \\
&\leq (e-1) \max_{t\in[0;1]} |x(t)|, \ \forall s \in [0;1] \\
\Rightarrow \max_{s\in[0;1]} |Ax(s)| &\leq (e-1) \max_{t\in[0;1]} |x(t)| \\
\Rightarrow \|Ax\| &\leq (e-1)\|x\|.
\end{aligned}
$$

Bất đẳng thức chứng tỏ A bị chặn và $\|A\| \leq e-1$. Mặt khác, xét $x_0(s) = 1$, $\forall s \in [0;1]$ ta có $x_0 \in C_{[0;1]}$ và $\|x_0\| = 1$. Do đó:

$$
\begin{aligned}
\|A\| &= \sup_{\|x\|=1} \|Ax\| \geq \|Ax_0\| = \max_{s\in[0;1]} |Ax_0(s)| \\
&= \max_{s\in[0;1]} \int_0^1 e^{s-t}\,dt = e-1.
\end{aligned}
$$

Vậy $\|A\| = e-1$.

b) Tương tự như trên ta cũng có A là toán tử tuyến tính từ không gian $C_{[0;1]}$ vào chính nó.

Với mọi $x \in C_{[0;1]}$, ta có:

$$
\begin{aligned}
|Ax(s)| &= \left|\int_0^1 \sin\pi(s-t)x(t)\,dt\right| \\
&\leq \int_0^1 |\sin\pi(s-t)||x(t)|\,dt \\
&\leq \left(\int_0^1 |\sin\pi(s-t)|\,dt\right)\max_{t\in[0;1]}|x(t)| \\
&= \left(\int_0^s \sin\pi(s-t)\,dt + \int_s^1 \sin\pi(t-s)\,dt\right)\max_{t\in[0;1]}|x(t)| \\
&= \left(\frac{\cos\pi(s-t)}{\pi}\Bigg|_0^s - \frac{\cos\pi(t-s)}{\pi}\Bigg|_s^1\right)\max_{t\in[0;1]}|x(t)| \\
&= \left(\frac{1}{\pi} - \frac{\cos\pi s}{\pi} - \frac{\cos\pi(1-s)}{\pi} + \frac{1}{\pi}\right)\max_{t\in[0;1]}|x(t)| \\
&= \frac{2}{\pi}\max_{t\in[0;1]}|x(t)|,\ \forall s\in[0;1]
\end{aligned}
$$

$$\Rightarrow \max_{s\in[0;1]}|Ax(s)| \leq \frac{2}{\pi}\max_{t\in[0;1]}|x(t)| \Rightarrow \|Ax\| \leq \frac{2}{\pi}\|x\|.$$

Suy ra A bị chặn và $\|A\| \leq \dfrac{2}{\pi}$.

Mặt khác, lấy $x_0(s) = 1$ ($\forall s \in [0;1]$), thì $\|x_0\| = 1$ và:

$$
\begin{aligned}
\|A\| = \sup_{\|x\|=1}\|Ax\| \geq \|Ax_0\| &= \max_{s\in[0;1]}|Ax_0(s)| \\
&= \max_{s\in[0;1]}\left|\int_0^1 \sin\pi(s-t)\,dt\right| \\
&= \max_{s\in[0;1]}\left|\frac{\cos\pi(s-t)}{\pi}\Bigg|_0^1\right| \\
&= \frac{2}{\pi}\max_{s\in[0;1]}\cos\pi s \\
&= \frac{2}{\pi}
\end{aligned}
$$

Vậy $\|A\| = \dfrac{2}{\pi}$. □

12. a) $\|f\| = \dfrac{3}{4}$;

b) $\|f\| = 1 - cos1$.

13. **Cách 1:** Dễ thấy f là phiếm hàm tuyến tính trên $C_{[a;b]}$.

Với mọi $x \in C_{[a;b]}$, ta có:

$$\begin{aligned} |f(x)| &= \left|\int_a^b x(t)\alpha(t)\,dt\right| \\ &\leq \int_a^b |x(t)||\alpha(t)|\,dt \\ &\leq \left(\int_a^b |\alpha(t)|\,dt\right) \max_{t\in[0;1]} |x(t)| \\ &= M.\|x\|,\ M = \int_a^b |\alpha(t)|\,dt. \end{aligned}$$

Từ đó suy ra f bị chặn, do đó liên tục và $\|f\| \leq M$.

Hàm α liên tục trên đoạn $[a;b]$ nên nó liên tục đều trên đoạn đó. Suy ra $\forall\varepsilon > 0, \exists\delta > 0$ sao cho $\forall t', t'' \in [a;b] : |t' - t''| < \delta$ đều có $|\alpha(t') - \alpha(t'')| < \varepsilon$.

Chia đoạn $[a;b]$ thành các đoạn nhỏ bởi các điểm $a = t_0 < t_1 < \cdots < t_{n-1} < t_n = b$ sao cho $\max\limits_{1\leq j\leq n} |t_j - t_{j-1}| < \delta$, kí hiệu $\Delta_j = t_j - t_{j-1}$ $(j = 1, 2, \ldots)$. Gọi $\Delta'_1, \Delta'_2, \ldots, \Delta'_r$ là nhóm các đoạn nhỏ sao cho $\alpha(t)$ chỉ có một dấu trên mỗi đoạn đó, gọi tất cả những đoạn còn lại thuộc nhóm thứ hai $\Delta''_1, \Delta''_2, \ldots, \Delta''_l$ $(l = n - r)$. Vì trên mỗi đoạn Δ''_k hàm α đổi dấu nên tồn tại một giá trị bằng không, suy ra $|\alpha(t)| < \varepsilon$, $t \in \Delta''_k$.

Ta xây dựng hàm $\widetilde{x}(t)$ liên tục trên $[a;b]$ như sau:

$$\widetilde{x}(t) = \operatorname{sign}\alpha(t),\ t \in \delta'_j\ (j = 1, 2, \ldots),$$

trên mỗi đoạn thuộc nhóm thứ hai ta coi hàm $\widetilde{x}(t)$ là tuyến tính, nếu a (hoặc b) là mút của đoạn thuộc nhóm thứ hai, ta coi $\widetilde{x}(a) = 0$ (hoặc $\widetilde{x}(b) = 0$). Dễ thấy $|\widetilde{x}(t)| \leq 1$ ($a \leq t \leq b$). Ta có

$$\begin{aligned}
\left|\int_a^b \alpha(t)\widetilde{x}(t)\,dt\right| &= \left|\sum_{j=1}^{r}\int_{\Delta'_j} \alpha(t)\widetilde{x}(t)\,dt + \sum_{k=1}^{l}\int_{\Delta''_k} \alpha(t)\widetilde{x}(t)\,dt\right| \\
&\geq \int_a^b |\alpha(t)|\,dt - 2\sum_{k=1}^{l}\int_{\Delta''_k} |\alpha(t)|\,dt \\
&> \int_a^b |\alpha(t)|\,dt - 2\varepsilon(b-a).
\end{aligned}$$

Vì $\varepsilon > 0$ nhỏ tùy ý, nên $\|f\| \geq \displaystyle\int_a^b |\alpha(t)|\,dt$.

Vậy $\|f\| = \displaystyle\int_a^b |\alpha(t)|\,dt$.

Cách 2: Theo trên ta có

$$\|f\| \leq \int_a^b |\alpha(t)|\,dt.$$

Đặt $z(t) = \operatorname{sign}(\alpha(t))$, $\forall t \in [a;b]$. Do z là hàm đơn giản nên nó khả tích (L) trên đoạn $[a;b]$ với độ đo kí hiệu μ.

Theo định lý Lusin:

$$\forall n = 1, 2, \cdots, \exists F_n \subset [a;b], \text{ đóng} : \mu([a;b] \setminus F_n) < \frac{1}{2Kn}$$

với $K = \max\limits_{t\in[a;b]} |\alpha(t)|$.

Lại theo định lý Titzơ-Urưxon, tồn tại một hàm số liên tục

$$x_n : [a;b] \to [-1;1]$$

sao cho $x_n\big|_{F_n} = z_n\big|_{F_n}$. Ta có:

$$\begin{aligned}
|M - f(x_n)| &= \left|\int_a^b |\alpha(t)|\,dt - \int_a^b \alpha(t)x_n(t)\,dt\right| \\
&= \left|\int_a^b |\alpha(t)|\big[z(t) - x_n(t)\big]\,dt\right| \\
&\le \int_a^b |\alpha(t)||z(t) - x_n(t)|\,dt \\
&= \int_{[a;b]\setminus F_n} |\alpha(t)||z(t) - x_n(t)|\,dt \\
&\le \max_{t\in[a;b]} |\alpha(t)| \int_{[a;b]\setminus F_n} \big[|z(t)| + |x_n(t)|\big]\,dt \\
&\le K \int_{[a;b]\setminus F_n} 2\,dt \\
&= 2K\mu([a;b]\setminus F_n) \le \frac{1}{n}.
\end{aligned}$$

Suy ra

$$\begin{aligned}
M &\le |f(x_n)| + \frac{1}{n} \le |f(x_n)| + \frac{1}{n} \\
&\le \|f\|\|x_n\| + \frac{1}{n} \le \|f\| + \frac{1}{n},\ \forall n.
\end{aligned}$$

Cho $n \to \infty$ ta được $M \le \|f\|$.

Vậy $\|f\| = M = \displaystyle\int_a^b |\alpha(t)|\,dt$. $\square$

14. **F không bị chặn trên $C_{[0;1]}$.**

Xét $x_n(t) = \sin n(t - t_0) \in C_{[0;1]}$, $(n = 1, 2, \dots)$ với $t_0 \in [0;1]$. Ta có:

$$F(x_n) = x_n'(t_0) = n\cos n(t - t_0)\Big|_{t=t_0} = n \to \infty$$

$$\|x_n\| = \max_{t\in C_{[0;1]}} |x_n(t)| \le 1, \forall n = 1, 2, \dots$$

Từ đây suy ra F không bị chặn trên $C_{[0;1]}$.

Nhận xét: Ta cũng có thể chứng minh F không liên tục tại $x_0 = 0 \in C_{[0;1]}$ bằng cách xét dãy $(x_n) \subset C_{[0;1]}$ với

$$x_n(t) = \frac{\sin n(t - t_0)}{n}, \ n = 1, 2, \ldots, \ t_0 \in [0; 1].$$

do đó F cũng không bị chặn.

F **bị chặn trên** $D_1[0;1]$.

Ta có, $\forall x \in D_1[0;1]$:

$$\|x\| = \max_{t \in [0;1]} \{|x(t)|, |x'(t)|\} \geq \max_{t \in [0;1]} |x'(t_0)| = \|F(x)\|,$$

do đó F bị chặn trên $D_1[0;1]$.

Từ trên suy ra: $\|F\| \leq 1$. Mặt khác, xét $x_1(t) = \sin(t - t_0)$, $t_0 \in [0;1]$, ta có:

$$\|F(x_1)\| = 1 \text{ và } \|x_1\| = 1,$$

nên

$$\|F\| = \sup_{\|x\|=1} \|F(x)\| \geq \|F(x_1)\| = 1.$$

Vậy $\|F\| = 1$. □

15. **a)** Dễ thấy phiếm hàm f định nghĩa như trên hoàn toàn được xác định và f tuyến tính.

Với mọi $x = (x_1, x_2, \ldots) \in c_0$ ta có:

$$|f(x)| = |x_1| \leq \max_{n \geq 1} |x_n| = \|x\|.$$

Suy ra f bị chặn và $\|f\| \leq 1$.

Mặt khác, lấy $x_0 = (1, 0, 0, \ldots) \in c_0$ thì $\|x_0\| = 1$, do đó

$$\|f\| = \sup_{\|x\|=1} \|f(x)\| \geq \|f(x_0)\| = |1| = 1.$$

Vậy $\|f\| = 1$.

b) Với mọi $x = (x_1, x_2, \ldots) \in c_0$, theo định nghĩa thì dãy $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ hội tụ tới không do đó bị chặn. Tức là

$$\exists C > 0 : |x_n| \leq C,\ \forall n = 1, 2, \ldots.$$

Xét chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left|\dfrac{x_n}{2^n}\right|$ gồm các số hạng không âm có dãy tổng riêng bị chặn, vì

$$\sum_{n=1}^{k} \left|\frac{x_n}{2^n}\right| \leq C\left(1 - \frac{1}{2^{k+1}}\right) \leq C, \forall k = 1, 2, \ldots$$

Do đó chuỗi nói trên hội tụ, suy ra chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{x_n}{2^n}$ hội tụ. Vì vậy phiếm hàm f xác định trên c_0.

Dễ thấy f tuyến tính. Với mọi $x \in c_0$:

$$|f(x)| = \left|\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n}{2^n}\right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \left|\frac{x_n}{2^n}\right| \leq \max_{n\geq 1} |x_n| \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \|x\|$$

suy ra f bị chặn và $\|f\| \leq 1$.

Mặt khác, với $\varepsilon > 0$ cố định tùy ý, lấy

$$x_\varepsilon = \left(\frac{1}{1+\varepsilon}, \ldots, \frac{1}{(1+\varepsilon)^n}, \ldots\right).$$

Ta có

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{(1+\varepsilon)^n} = 0$$

nên $x_\varepsilon \in c_0$ và có $\|x_\varepsilon\| = \dfrac{1}{1+\varepsilon} < 1$. Từ đó

$$\|f\| = \sup_{\|x\|\leq 1} \|f(x)\| \geq \|f(x_\varepsilon)\| = \frac{1}{1+\varepsilon}$$

$\frac{1}{1+2\varepsilon}$

Chuyển qua giới hạn khi $\varepsilon \to 0$ ta được $\|f\| \geq 1$.

Vậy $\|f\| = 1$.

c) Lấy $\left(1, \frac{1}{2}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots\right) \in c_0$ nhưng chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ lại phân kì.

Do đó f không xác định trên c_0. □

16. Ta có f bị chặn trên hình cầu S nên $\exists C > 0$:

$$|f(x)| \leq C\|x\|, \forall x \in S.$$

Mà $\forall x \in S$ thì

$$\|x\| = \|(x-a) + a\| \leq \|x - a\| + \|a\| \leq \|a\| + r,$$

do đó

$$|f(x)| \leq C(\|a\| + r) = M, \ \forall x \in S$$

Lấy x bất kì khác phần tử không của X.Khi đó

$$y = \frac{rx}{\|x\|} + a \in S \Rightarrow |f(y)| \leq M$$

và rõ ràng ta cũng có $|f(a)| \leq M$. Từ đó

$$\left|f\left(\frac{rx}{\|x\|}\right)\right| = |f(y) - f(a)| \leq |f(y)| + |f(a)| \leq 2M,$$

suy ra

$$|f(x)| \leq \frac{2M}{r}\|x\| \tag{2.11}$$

Dễ thấy (2.11) cũng đúng với $x = \theta$. Vậy

$$|f(x)| \leq \frac{2M}{r}\|x\|, \forall x \in X,$$

nghĩa là f bị chặn. □

17. a)

i) $\Rightarrow$ ii) Hiển nhiên.

ii) $\Rightarrow$ iii) Giả sử f liên tục tại (θ, θ) nhưng không tồn tại số dương C thoả mãn đề bài. Thế thì:

$$(\forall n = 1, 2, \ldots)(\exists x_n \in X, y_n \in Y : \|x_n\| = 1, \|y_n\| = 1)$$

$$|f(x_n, y_n)| \geq n$$

Đặt $x'_n = \dfrac{x_n}{\sqrt{n}}$, $y'_n = \dfrac{y_n}{\sqrt{n}}$, ta có $x'_n \to \theta$, $y'_n \to \theta$ $(n \to \infty)$ nhưng

$$|f(x'_n, y'_n)| = \frac{1}{n}|f(x_n, y_n)| \geq 1$$

mâu thuẫn giả thiết f liên tục tại (θ, θ). Vậy phải tồn tại số dương C thỏa mãn đề bài.

iii) $\Rightarrow$ i) Với (x, y) bất kì thuộc $X \times Y$ và với mọi dãy $\{(x_n, y_n)\} \subset X \times Y$ hội tụ tới (x, y), ta có:

$$x_n \to x,\ y_n \to y\ (n \to \infty)$$

và

$$\begin{aligned}|f(x_n, y_n) - f(x, y)| &\leq |f(x_n, y_n) - f(x_n, y)| + \\ &\qquad + |f(x_n, y) - f(x, y)| \\ &\leq |f(x_n, y_n - y)| + |f(x_n - x, y)| \\ &\leq C\|x_n\|\|y_n - y\| + \\ &\qquad + C\|x_n - x\|\|y\| \to 0 (n \to \infty).\end{aligned}$$

Vậy f liên tục trên toàn không gian tích.

b) Hiển nhiên

c) Không mất tính tổng quát, giả sử X là không gian Banach. Lấy (x_0, y_0) tùy ý thuộc $X \times Y$, với mọi dãy $\{(x_n, y_n)\} \subset X \times Y$ hội tụ tới (x_0, y_0) ta có

$$x_n \to x_0,\ y_n \to y_0\ (n \to \infty)$$

Xét dãy phiếm hàm $f_{y_n}(x) = f(x, y_n)$, $\forall x \in X$ $(n = 1, 2, \ldots)$. Với mỗi $x \in X$ ta có

$$\lim_{n\to\infty} f_{y_n}(x) = \lim_{n\to\infty} f(x, y_n) = f(x, y_0) = f_{y_0}(x).$$

Do đó dãy (f_{y_n}) bị chặn từng điểm trên không gian Banach X. Theo nguyên lý bị chặn đều thì dãy $(\|f_{y_n}\|)$ bị chặn, tức

$$\exists M > 0 : \|f_{y_n}\| \leq M, \ \forall n.$$

Xét $\varepsilon > 0$ nhỏ tùy ý, vì $x_n \to x_0$ nên

$$\exists n_1, \forall n > n_1 : \|x_n - x_0\| < \frac{\varepsilon}{2M},$$

lại vì f_{x_0} liên tục tại y_0 nên

$$\exists n_2, \forall n > n_2 : |f_{x_0}(y_n - y_0)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

Khi đó, với mọi $n > \max\{n_1, n_2\}$ ta có

$$\begin{aligned}
|f(x_n, y_n) - f(x_0, y_0)| &\leq |f(x_n - x_0, y_n)| + |f(x_0, y_n - y_0)| \\
&= |f_{y_n}(x_n - x_0)| + |f_{x_0}(y_n - y_0)| \\
&\leq M\frac{\varepsilon}{2M} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.
\end{aligned}$$

Vậy f liên tục. $\square$

18. Xét ánh xạ:

$$\begin{aligned}
I : (X, \|\cdot\|_1) &\longrightarrow (X, \|\cdot\|_2) \\
x &\longmapsto x
\end{aligned}$$

Từ giả thiết, suy ra I liên tục, do đó bị chặn. Tức là:

$$\exists \alpha > 0 : \|x\|_2 \leq \alpha \|x\|_1, \ \forall x \in X.$$

Mặt khác I là toán tử tuyến tính, ánh xạ 1-1 từ không gian Banach lên không gian Banach nên toán tử ngược:

$$\begin{aligned}
I^{-1} : (X, \|\cdot\|_2) &\longrightarrow (X, \|\cdot\|_1) \\
x &\longmapsto I^{-1}(x) = x
\end{aligned}$$

cũng liên tục, suy ra:

$$\exists \beta > 0 : \|x\|_1 \leq \beta \|x\|_2, \ \forall x \in X.$$

Vậy hai chuẩn đã cho tương đương. □

19. Cách 1: Xét ánh xạ:

$$\begin{aligned} P_1 : X &\longrightarrow E \\ x &\longmapsto P_1 x = u \end{aligned}$$

Ta sẽ chứng tỏ P_1 liên tục bằng cách chứng minh

$$G(P_1) = \{(x, P_1 x) : x \in X\}$$

đóng trong $X \times E$, nghĩa là, với mọi $\{(x_n, P_1 x_n)\} \subset G(P_1)$ hội tụ tới $(x, y) \in X \times E$ ta sẽ chứng minh $(x, y) \in G(P_1)$ hay $y = P_1 x$.

Thật vậy, theo giả thiết:

$$(\forall n = 1, 2, \ldots)(\exists!(u_n, v_n) \in E \times F) : x_n = u_n + v_n, \text{ và } P_1 x_n = u_n$$

Do đó, khi $n \to \infty$:

$$\begin{aligned} &(x_n, P_1 x_n) \to (x, y) \\ \Rightarrow &\|(x_n, u_n) - (x, y)\| \to 0 \\ \Rightarrow &\|(x_n - x, u_n - y)\| \to 0 \\ \Rightarrow &\|x_n - x\| + \|u_n - y\| \to 0 \\ \Rightarrow &\|x_n - x\| \to 0 \text{ và } \|u_n - y\| \to 0 \\ \Rightarrow &x_n \to x \text{ và } u_n \to y \\ \Rightarrow &x_n - u_n \to x - y \\ \Rightarrow &v_n \to x - y \end{aligned}$$

$(u_n) \subset E$ và hội tụ tới y nên $y \in E$.

$(v_n) \subset F$ và hội tụ tới $x - y$ nên $x - y \in F$.

Từ đó ta có biểu diễn:

$$x = \underbrace{u}_{\in E} + \underbrace{x - y}_{\in F},$$

nên $P_1 x = y$. Do đó có P_1 là toán tử đóng, hơn nữa nó là ánh xạ từ không gian Banach vào không gian Banach nên theo nguyên lý đồ thị đóng Banach, ta có P_1 liên tục.

Chứng minh tương tự ta cũng có ánh xạ:

$$P_2 : X \longrightarrow F$$
$$x \longmapsto v$$

liên tục. □

Cách 2: Xét ánh xạ:

$$A : E \times F \longrightarrow X$$
$$(u, v) \longmapsto x = u + v$$

Ta có A là song ánh tuyến tính từ không gian Banach $E \times F$ lên không gian Banach X, hơn nữa:

$$\|Ax\| = \|u + v\| \leq \|u\| + \|v\| = \|(u, v)\|, \ \forall x \in X$$

suy ra A liên tục. Theo nguyên lý ánh xạ mở Banach ta có ánh xạ ngược A^{-1} cũng liên tục, nên tồn tại $C > 0$:

$$\|A^{-1}x\| = \|A^{-1}(u + v)\| = \|(u, v)\| \leq C\|x\|, \ \forall x \in X$$
$$\Rightarrow \|u\| + \|v\| \leq C\|x\|, \ \forall x \in X$$
$$\Rightarrow \|u\| \leq C\|x\|; \|v\| \leq C\|x\|, \ \forall x \in X$$

Từ đây ta có ngay điều phải chứng minh. □

20. Ta chỉ cần chứng minh A là toán tử đóng.

Với mọi $\{(x_n, Ax_n)\} \subset G(A)$ hội tụ tới $(x, y) \in X \times Y$, ta có:

$$x_n \to x \text{ và } Ax_n \to y \ (n \to \infty).$$

Theo giả thiết, với mọi phiếm hàm tuyến tính liên tục g trên Y, khi $n \to \infty$:

$$\begin{aligned} & x_n - x \to \theta \text{ (phần tử không)} \\ & \Rightarrow g(A(x_n - x)) \to 0 \\ & \Rightarrow g(Ax_n) \to g(Ax) \\ \text{lại có } & g(Ax_n) \to g(y) (\text{ vì } Ax_n \to y) \\ \text{nên } & g(Ax) = g(y) \\ & \Rightarrow g(Ax - y) = 0 \end{aligned}$$

Nếu $Ax - y \neq \theta$ thì tồn tại phiếm hàm tuyến tính g^* liên tục trên Y:

$$g^*(Ax - y) = \|Ax - y\| \neq 0 \text{ (mâu thuẫn).}$$

Do đó phải có $Ax - y = \theta$ hay $Ax = y$, tức $(x, y) \in G(A)$. Vậy A là toán tử đóng từ không gian Banach X vào không gian Banach Y, nên A liên tục.

21. Giả sử dãy toán tử tuyến tính liên tục (A_n) hội tụ từng điểm đến toán tử tuyến tính liên tục A. Thế thì theo nguyên lý bị chặn đều ta có điều kiện 1), còn điều kiện 2) là hiển nhiên.

Ngược lại, giả sử dãy toán tử tuyến tính liên tục (A_n) thỏa mãn hai điều kiện 1) và 2). Với mọi $x \in X$, ta sẽ chứng minh dãy $(A_n x)$ là dãy cơ bản trong Y.

Thật vậy, với mọi $\varepsilon > 0$ cho trước nhỏ tùy ý:

$$(\exists y \in E)\ \|x - y\| < \frac{\varepsilon}{3C}$$

Theo giả thiết, ta có $(A_n y)$ là dãy cơ bản trong Y, suy ra:

$$(\exists n_0 \in \mathbb{N}^*)(\forall n, m \geq n_0)\ \|A_n y - A_m y\| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Từ đó

$$\begin{aligned} \|A_n x - A_m x\| &\leq \|A_n x - A_n y\| + \|A_n y - A_m y\| + \|A_m y - A_m x\| \\ &\leq \|A_n\| \|x - y\| + \|A_n y - A_m y\| + \|A_m\| \|x - y\| \\ &\leq C\frac{\varepsilon}{3C} + \frac{\varepsilon}{3} + C\frac{\varepsilon}{3C} = \varepsilon\ (\forall n, m \geq n_0) \end{aligned}$$

Điều đó chứng tỏ $(A_n x)$ là dãy cơ bản trong không gian Banach Y, do đó nó hội tụ. Gọi $Ax \in Y$ là giới hạn của dãy trên. Từ đó ta nhận được ánh xạ A từ không gian Banach X vào không gian Banach Y. Rõ ràng dãy toán tử (A_n) hội tụ từng điểm tới toán tử A, nên A là toán tử tuyến tính liên tục. □

22. Với mọi $n = 1, 2, \ldots$, ta có:

$$\sum_{k=0}^{n} \|A^k\| \le \sum_{k=0}^{n} \|A\|^k \le \sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

Cho qua giới hạn khi $n \to \infty$ ta được

$$\sum_{k=0}^{\infty} \|A^k\| \le \frac{1}{1-q},$$

tức chuỗi $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \|A^k\|$ hội tụ. Lại do X là không gian Banach nên không gian $I(X, X)$ cũng là không gian Banach, do đó chuỗi $\sum\limits_{k=0}^{\infty} A^k$ hội tụ trong $I(X, X)$.

Với mỗi $n = 1, 2, \ldots$:

$$(I - A)\sum_{k=0}^{n} A^k = \sum_{k=0}^{n} (I - A)A^k = I - A^{n+1}.$$

Chuyển qua giới hạn khi $n \to \infty$, với chú ý rằng

$$\|A^n\| \le \|A\|^n \le q^n \to 0 \ (n \to \infty) \Rightarrow A^n \to 0 \ (n \to \infty),$$

ta được $(I - A)\sum\limits_{k=0}^{\infty} A^k = I$.

Tương tự ta cũng có $\left[\sum\limits_{k=0}^{\infty} A^k\right](I - A) = I$. Từ đó suy ra tồn tại toán tử ngược $(I - A)^{-1}$ và

$$(I - A)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} A^k.$$

Vậy ta có điều phải chứng minh. □

23. Giả sử f là toán tử tuyến tính bị chặn ánh xạ không gian định chuẩn hữu hạn chiều X vào không gian định chuẩn Y. Gọi E là tập hợp bị chặn bất kì trong X, ta sẽ chứng minh $f(E)$ là tập hợp compak tương đối trong Y.

Thật vậy, do X là hữu hạn chiều nên $\overline{E}$ là tập hợp compak trong X. Từ f liên tục suy ra $f(\overline{E})$ compak trong Y. Vì mọi tập hợp con của tập hợp compak là tập hợp compak tương đối nên $f(E) \subset f(\overline{E})$ là tập hợp compak tương đối trong Y. Vậy f là toán tử compak. □

24. Giả sử $\dim Y = n$ và $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ là một cơ sở của Y. Do Y đồng phôi tuyến tính với $\mathbb{E}^n$ nên có thể giả thiết chuẩn trong không gian Y xác định như sau:

$$\|y\| = \|y_1e_1 + y_2e_2 + \cdots + y_ne_n\| = \max_{1\le k\le n} |y_k|, \forall y \in Y.$$

Xét toán tử tuyến tính bị chặn A từ không gian định chuẩn X vào không gian định chuẩn Y. Thế thì, với mọi $x \in X$ ta có $Ax \in Y$ nên đối với cơ sở đã cho của Y, Ax có thể biểu diễn dưới dạng:

$$Ax = \sum_{k=1}^{n} f_k(x)e_k.$$

Bây giờ ta sẽ chứng minh $f_k \in X^*$.

Dễ thấy f_k là phiếm hàm tuyến tính trên X. Hơn nữa, vì A bị chặn nên

$$\exists C > 0 : \|Ax\| \le C\|x\|, \forall x \in X.$$

Mà

$$\|Ax\| = \max_{1\le k\le m} |f_k(x)|$$

suy ra

$$|f_k(x)| \le C\|x\|, \forall x \in X, \forall k = 1, 2, \dots, n.$$

Vậy $f_k \in X^*, \forall k = 1, 2, \dots, n$. Từ đó có điều phải chứng minh. □

25. Bạn đọc tự giải.

26. Giả sử A là toán tử compak ánh xạ không gian Banach X vào không gian Banach Y.

Với mỗi $(x_n)_{n=1}^{\infty} \subset X$ hội tụ yếu tới x_0 trong X, ta có

$$Ax_n \xrightarrow{\text{yếu}} y_0 = Ax_0 \text{ trong } Y. \tag{2.12}$$

Thật vậy, $\forall g \in Y^*$, ta có $g \circ A \in X^*$, nên

$$\lim_{n\to\infty} g \circ A(x_n) = g \circ A(x_0)$$
$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} g(Ax_n) = g(Ax_0)$$

Từ đó có (2.12).

Giả sử $\|Ax_n - y_0\| \nrightarrow 0$ khi $n \to \infty$. Khi đó tồn tại $\varepsilon > 0$ và dãy $(x_{n_k}) \subset (x_n)$:

$$\|Ax_n - y_0\| \geq \varepsilon, \ \forall k = 1, 2, \dots \tag{2.13}$$

Dãy (x_n) hội tụ yếu nên bị chặn, do đó (x_{n_k}) bị chặn. Vì A compak nên dãy (x_{n_k}) chứa một dãy con $(x_{n_{k_j}})$ hội tụ trong Y

$$Ax_{n_{k_j}} \to y_1 \ (j \to \infty)$$
$$\Rightarrow Ax_{n_{k_j}} \xrightarrow{\text{yếu}} y_1 \ (j \to \infty).$$

Từ (2.13) suy ra $\|y_1 - y_0\| \geq \varepsilon \Rightarrow y_1 \neq y_0$. Nhưng từ (2.12) ta lại có:

$$Ax_{n_{k_j}} \xrightarrow{\text{yếu}} y_0 \ (j \to \infty)$$

Dãy $\left(Ax_{n_{k_j}}\right)$ hội tụ yếu tới hai giới hạn khác nhau, vô lý. Vậy phải có

$$\|Ax_n - y_0\| \to 0 \ (n \to \infty)$$

hay dãy (Ax_n) hội tụ mạnh tới $y_0 = Ax_0$. $\square$

27. Xét hai trường hợp:

- α đồng nhất không, thế thì $A \equiv \theta$ (toán tử không) nên A compak.
- α không đồng nhất không.

Khi đó tồn tại $t_0 \in (0;1) : \alpha(t_0) \neq 0$. Xét dãy $(x_n)_{n=1}^{\infty} \subset S$, S là hình cầu đơn vị đóng trong $C[0;1]$, xác định như sau:

$$x_n(t) = \begin{cases} (1+t-t_0)^n & \text{nếu } 0 \leq t < t_0 \\ (1+t_0-t)^n & \text{nếu } t_0 \leq t \leq 1 \end{cases}$$

Dãy hàm (Ax_n) hội tụ từng điểm đến hàm $x(t)$, với:

$$x(t) = \begin{cases} 0 & \text{nếu } t \neq t_0 \\ 1 & \text{nếu } t = t_0 \end{cases}$$

Hàm $x(t)$ gián đoạn và mọi dãy con của (Ax_n) đều hội tụ từng điểm đến hàm này nên không hội tụ đều. Do đó từ (Ax_n) không rút ra được dãy con hội tụ, nghĩa là $A(S)$ không là tập hợp compak tương đối. Vậy A không compak. □ .

28. Không gian liên hợp của $\mathbb{R}^n$

Ta xét không gian $\mathbb{R}^n$ với chuẩn Eukleides và gọi $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ là một cơ sở của nó.

Với mỗi $u = (u_1, u_2, \ldots, u_n) \in \mathbb{R}^n$, ta xác định một phiếm hàm f_u như sau: nếu $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ thì

$$f_u(x) = \sum_{i=1}^{n} u_i x_i$$

Dễ thấy f_u tuyến tính, hơn nữa nó bị chặn, vì

$$\begin{aligned} |f_u(x)| &= \left| \sum_{i=1}^{n} u_i x_i \right| \\ &\leq \left(\sum_{i=1}^{n} |u_i|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \times \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2 \right)^{\frac{1}{2}} = \|u\| \|x\| \qquad (2.14) \end{aligned}$$

Vậy $f_u \in (\mathbb{R}^n)^*$. Ngược lại, với mọi $f \in (\mathbb{R}^n)^*$ ta đều có

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} u_i x_i$$

trong đó $u_i = f(e_i), i = 1, 2, \ldots, n$ không phụ thuộc vào x. Đẳng thức chứng tỏ, với mỗi $f \in (\mathbb{R}^n)^*$ đều tồn tại $u \in \mathbb{R}^n$ sao cho $f = f_u$.

Ta có, ánh xạ

$$u \in \mathbb{R}^n \mapsto f_u \in (\mathbb{R}^n)^*$$

là tuyến tính, lập luận trên chứng tỏ nó là toàn ánh, và nếu $f_u = \theta$ thì $u = \theta$. Nên ánh xạ đó là một song ánh tuyến tính. Suy ra $(\mathbb{R}^n)^*$ là một không gian định chuẩn n-chiều, do đó đồng phôi tuyến tính với $\mathbb{R}^n$. Hơn nữa, chúng còn đẳng cấu với nhau. Thật vậy, từ (2.14) suy ra

$$\|f_u\| \leq \|u\|.$$

Mặt khác, nếu lấy $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ với

$$x_i = 0 \text{ nếu } u_i = 0, \quad x_i = \frac{|u_i|^2}{u_i} \text{ nếu } u_i \neq 0 \ (i = 1, 2, \ldots, n)$$

thì

$$\|x\| = \left(\sum_{i=1}^{n} |u_i|^2\right)^{1/2} = \|u\|,$$

và ta có

$$\|u\|\|x\| = \|u\|^2 = \sum_{i=1}^{n} u_i x_i = f_u(x) \leq \|f\|\|x\|$$

suy ra $\|u\| \leq \|f_u\|$.

Do đó $\|f_u\| = \|u\|$, không gian $\mathbb{R}^n$ và không gian liên hợp với nó đẳng cấu với nhau, vì vậy không gian liên hợp của $\mathbb{R}^n$ là chính nó.

Với chuẩn khác bạn đọc tự giải.

Không gian $l_p (p > 1)$

Ta sẽ chứng tỏ rằng, không gian l_p^* đẳng cấu tuyến tính với không gian l_q, trong đó số q thỏa mãn điều kiện

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

Với mỗi $u = (u_n) \in l_q$ ta xác định phiếm hàm f_u trên không gian l_p như sau: nếu $x = (x_n) \in l_p$ thì

$$f_u(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n x_n.$$

Chuỗi ở vế phải hội tụ, vì theo bất đẳng thức Holder ta có

$$|f_u(x)| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |u_n||x_n| \leq \left(\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|^q\right)^{\frac{1}{q}} \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p\right)^{\frac{1}{p}} = \|u\|_q \|x\|_p$$

Rõ ràng f_u tuyến tính, và bất đẳng thức trên chứng tỏ rằng $f_u \in l_p^*$ với

$$\|f_u\| \leq \|u\|_q.$$

Ngược lại, lấy $f \in l_p^*$ tùy ý, thì với mọi $x = (x_n) \in l_p$ ta đều có

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n x_n,$$

trong đó $u_n = f(e_n)$ không phụ thuộc vào x. Để khảo sát tính chất của dãy số $u = (u_n)$, với mọi số nguyên dương N, ta xét $y_N = (x_n^{(N)}) \in l_p$ xác định như sau

$$x_n^{(N)} = \begin{cases} \dfrac{|u_n|^q}{u_n} & \text{nếu } n \leq N \text{ và nếu } u_n \neq 0, \\ 0 & \text{đối với các trường hợp còn lại.} \end{cases}$$

Ta có

$$\|y_N\|_p = \left(\sum_{n=1}^{N} |x_n^{(N)}|^p\right)^{1/p} = \left(\sum_{n=1}^{N} |u_n|^q\right)^{1/p},$$

$$\sum_{n=1}^{N} |u_n|^q = f(y_N) \leq \|f\| \|y_N\|_p = \|f\| \left(\sum_{n=1}^{N} |u_n|^q\right)^{1/p},$$

do đó

$$\left(\sum_{n=1}^{N} |u_n|^q\right)^{1/q} \leq \|f\|.$$

Cho $N \to \infty$ ta được $u \in l_q$ và

$$\|u\|_q \leq \|f\|.$$

Vậy mọi phiếm hàm $f \in l_p^*$ đều có dạng $f = f_u$ với $u \in l_q$, hơn nữa $\|f_u\| = \|u\|_q$.

Từ đó ta thiết lập được một ánh xạ

$$u \in l_q \mapsto f_u \in l_p^*$$

từ l_q lên l_p^*. Rõ ràng ánh xạ này tuyến tính và đẳng thức vừa chứng minh cho ta thấy rằng đó là một phép đẳng cấu tuyến tính của không gian l_q lên không gian l_p^*.

Không gian liên hợp của không gian l_p là không gian l_q.

Đặc biệt không gian liên hợp của l_2 là chính nó.

Lập luận tương tự như trên ta được không gian liên hợp của c_0 là l_1. □

29. Cách 1:

Gọi $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ là một cơ sở của không gian $\mathbb{R}^n$, với

$$e_j = \underbrace{(0, 0, \dots, 1, 0, \dots, 0)}_{\text{vị trí thứ } j \text{ bằng } 1}, \; j = 1, 2, \dots, n.$$

Khi đó tồn tại hệ $f_1, f_2, \dots, f_n$ các phiếm hàm tuyến tính liên tục trên $\mathbb{R}^n$ sao cho

$$f_i(e_j) = \begin{cases} 1 & \text{nếu } i = j \\ 0 & \text{nếu } i \neq j \end{cases}$$

với mọi $i, j = 1, 2, \dots, n$.

Thật vậy, gọi L_i là không gian con của $\mathbb{R}^n$ sinh bởi $e_1, \dots, e_{i-1}$, $e_{i+1}, \dots, e_n$. Ta có L_i đóng và $e_i \notin L_i$ nên tồn tại $S(e_i, r) \cap L_i = \emptyset$ suy ra $d(e_i, L_i) \geq r > 0$. Khi đó theo nguyên lý thác triển Hahn-Banach tồn tại phiếm hàm tuyến tính liên tục f_i xác định trên $\mathbb{R}^n$ sao cho

$$f_i(e_i) = 1, f_i(y) = 0 \forall y \in L_i.$$

Hệ $\{f_i : i = 1, 2, \dots, n\}$ là hệ phải tìm. Chú ý rằng với mọi $y = (y^{(1)}, \dots, y^{(n)})$ ta có

$$f_i(y) = f(y^{(1)}e_1 + \cdots + y^{(n)}e_n) = y^{(i)},\ i = 1, 2, \dots, n.$$

Lấy dãy bất kì $(x_k)_{k=1}^{\infty}$ hội tụ yếu tới phần tử x_0 trong $\mathbb{R}^n$ và giả sử có biểu diễn

$$x_k = (x_k^{(1)}, \dots, x_k^{(n)}),\ k = 0, 1, 2, \dots$$

Với $\varepsilon > 0$ nhỏ tùy ý, xét một lân cận yếu U của x_0 xác định như sau

$$U = \{y \in \mathbb{R}^n : |f_i(y) - f_i(x_0)| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{n}},\ i = 1, 2, \dots, n\}.$$

Khi đó $(\exists k_0 \in \mathbb{N}^*)(\forall k \geq k_0)$ ta có $x_k \in U$, tức là

$$|f_i(x_k) - f_i(x_0)| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{n}},\ i = 1, 2, \dots, n$$
$$\Rightarrow |x_k^{(i)} - x_0^{(i)}| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{n}},\ i = 1, 2, \dots, n.$$

Từ đó ta có

$$\|x_k - x_0\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |x_k^{(i)} - x_0^{(i)}|} < \varepsilon.$$

Do đó dãy (x_k) hội tụ mạnh tới x_0.

Cách 2:

Xét toán tử đồng nhất I xác định trong không gian Eukleides $\mathbb{R}^n$. Dễ thấy rằng I là toán tử compak, hơn nữa $\mathbb{R}^n$ là không gian Banach nên, theo bài 26, I sẽ biến mọi dãy hội tụ yếu thành dãy hội tụ mạnh. Từ đây có điều phải chứng minh. □

30. Ta chỉ cần chứng minh rằng nếu dãy (x_n) hội tụ yếu đến phần tử x trong l_1 thì nó hội tụ mạnh đến x.

Giả sử $x_n \xrightarrow{\text{yếu}} x$, khi đó $y_n = x_n - x \xrightarrow{\text{yếu}} \theta$. Ta cần chứng minh $\|y_n\| \to 0$. Giả sử $\|y_n\| \nrightarrow 0$, khi đó tồn tại một số $\varepsilon > 0$ và dãy con (y_{n_k}) của (y_n) sao cho $\|y_{n_k}\| \geq \varepsilon$, $\forall k$. Tuy vậy, không mất tính tổng quát ta có thể coi $\|y_n\| \geq \varepsilon$. Với mỗi n, phiếm hàm $x^*(x) = x_n, \forall x = (x_k) \in l_1$ tuyến tính liên tục. Đặt $y_n = (\xi_{ni})_{i=1}^{\infty}$. Vì $x_n \xrightarrow{\text{yếu}} x$ nên với mỗi i ta có $\lim\limits_{n\to\infty} x_i^*(y_n) = x_i^*(0) = 0$, tức là $\lim\limits_{n\to\infty} \xi_{ni} = 0, \forall i$. Do đó, với mọi m: $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{i=1}^{m} |\xi_{ni}| = 0$. Lấy m_1 sao cho $\sum\limits_{i=1}^{m_1} |\xi_{1i}| \geq \varepsilon$, lấy n_1 sao cho $\sum\limits_{i=1}^{m_1} |\xi_{n_1 i}| < \dfrac{\varepsilon}{4}$, rồi lại lấy $m_2 > m_1$ sao cho $\sum\limits_{i=1}^{m_2} |\xi_{n_1 i}| \geq \varepsilon$ và $\sum\limits_{i=m_2}^{\infty} |\xi_{n_1 i}| < \dfrac{\varepsilon}{4}$. Khi đó $\sum\limits_{i=m_1+1}^{m_2} |\xi_{n_1 i}| \geq \dfrac{3\varepsilon}{4}$.

Cứ tiếp tục như vậy ta sẽ nhận được hai dãy số nguyên dương tăng nghiêm ngặt (n_k) và (m_k) sao cho

$$\sum_{i=1}^{m_k} |\xi_{n_k i}| < \frac{\varepsilon}{4}, \sum_{i=m_k+1}^{m_{k+1}} |\xi_{n_k i}| \geq \frac{3\varepsilon}{4}, \sum_{i=m_{k+1}}^{\infty} |\xi_{n_k i}| < \frac{\varepsilon}{4}.$$

Đặt $\eta_i = \operatorname{sign} \xi_{n_k i}$ với $m_k + 1 \leq i \leq m_{k+1}, k = 2, 3, \ldots$ Thế thì (η_i) bị chặn và phiếm hàm

$$x^*(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \eta_i \xi_i, \ \forall x = (\xi_i) \in l_1$$

tuyến tính liên tục, hơn nữa

$$|x^*(y_{n_k}) = \left|\sum_{i=1}^{\infty} \eta_i \xi_i\right| \geq \sum_{i=m_k+1}^{m_{k+1}} |\xi_{n_k i}| - \sum_{i=1}^{m_k} |\xi_{n_k i}| - \sum_{i=m_{k+1}}^{\infty} |\xi_{n_k i}|$$
$$\geq \frac{\varepsilon}{4}$$

với mọi k, mâu thuẫn với $y_{n_k} \xrightarrow{\text{yếu}} 0$.

Vậy có điều phải chứng minh. □

31. Với mỗi $n = 1, 2, \ldots$ $\forall x \in C[a; b]$ và $\forall s \in [a; b]$ ta có

$$\begin{aligned}
|A_n x(s) - Ax(s)| &= \left|\int_a^b P_n(s,t)x(t)\,dt - \int_a^b K(s,t)x(t)\,dt\right| \\
&= \left|\int_a^b [P_n(s,t) - K(s,t)]x(t)\,dt\right| \\
&\leq \int_a^b |P_n(s,t) - K(s,t)||x(t)|\,dt \\
&\leq (b-a)\max_D |K(s,t) - P_n(s,t)| \max_{a \leq t \leq b} |x(t)| \\
&= (b-a)\max_D |K(s,t) - P_n(s,t)|\|x\|.
\end{aligned}$$

Từ đó suy ra

$$\|A_n - A\| \leq (b-a)\max_D |K(s,t) - P_n(s,t)|,\ n = 1, 2, \ldots.$$

Chuyển qua giới hạn khi $n \to \infty$ ta được

$$\lim_{n\to\infty} \|A_n - A\| = 0.$$

Vậy dãy toán tử (A_n) hội tụ theo chuẩn tới toán tử A. □

32. Theo định lý Phubini ta có

$$\begin{aligned}
B[Ax(u)] &= \int_a^b H(s,u)\left[\int_a^b K(u,t)x(t)\,dt\right]du \\
&= \int_a^b \left[\int_a^b H(s,u)K(u,t)du\right]x(t)\,dt \\
&= \int_a^b R(s,t)x(t)\,dt,\ \forall x \in C_{[a;b]}
\end{aligned}$$

Từ đây ta có điều phải chứng minh. □

33. Trong không gian l_2, ta gọi

$$E = \{(x_n)_{n=1}^{\infty} \in l_2 : x_{2n-1} = 0, n = 1, 2, \ldots\}$$

và

$$F = \{(x_n)_{n=1}^{\infty} \in l_2 : x_{2n} = nx_{2n-1}, n = 1, 2, \ldots\}.$$

Dễ thấy rằng E và F là những không gian tuyến tính con đóng trong l_2. Ta sẽ chứng minh $E + F$ trù mật trong l_2.

Với mọi $x = (x_1, x_2, \ldots) \in l_2$, ta xét dãy $\{x^{(k)}\}_{k=1}^{\infty} \subset l_2$ xác định như sau

$$x^{(k)} = (x_1, x_2, \ldots, x_k, 0, 0, \ldots),\ k = 1, 2, \ldots.$$

Dễ thấy $\lim\limits_{k\to\infty} x^{(k)} = x$ và ta có thể phân tích

$$x^{(2k)} = (0, x_2 - x_1, 0, x_4 - 2x_3, \ldots, 0, x_{2k} - kx_{2k-1}, 0, 0, \ldots) +$$

$$+ (x_1, x_1, x_3, 2x_3, \ldots, x_{2k-1}, kx_{2k-1}, 0, 0, \ldots) \in E + F$$

hoặc

$$x^{(2k+1)} = (0, x_2 - x_1, 0, x_4 - 2x_3, \ldots, 0, x_{2k} - kx_{2k-1}, 0, 0, \ldots) +$$

$$+ (x_1, x_1, x_3, 2x_3, \ldots, x_{2k-1}, kx_{2k-1}, x_{2k+1}, 0, 0, \ldots) \in E + F.$$

Do đó ta có $\{x^{(k)}\}_{k=1}^{\infty} \subset E+F$. Vậy $E+F$ trù mật trong l_2, nên

$$\overline{E+F} = l_2 \tag{2.15}$$

Mặt khác, ta thấy phần tử $\left(1, 0, \frac{1}{2}, 0, \frac{1}{3}, 0, \dots\right) \in l_2$ và nó viết được một cách duy nhất dưới dạng

$$\left(1, 0, \frac{1}{2}, 0, \frac{1}{3}, 0, \dots\right) = (0, -1, 0, -1, 0, -2, \dots) +$$

$$+ \left(1, 1, \frac{1}{2}, 1, \frac{1}{3}, 1, \dots\right).$$

Từ cách viết trên đây ta suy ra $\left(1, 0, \frac{1}{2}, 0, \frac{1}{3}, 0, \dots\right) \notin E+F$, do đó

$$E + F \neq l_2 \tag{2.16}$$

Từ (2.15) và (2.16) suy ra $E+F$ không phải là tập hợp đóng. □

34. Không gian $\mathbb{E}^n$

Gọi $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ là một cơ sở của $\mathbb{E}^n$.

Thế thì với mọi $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{E}^n$, ta có

$$x = x_1 e_1 + x_2 e_2 + \dots + x_n e_n$$

và với mọi phiếm hàm tuyến tính liên tục f xác định trên $\mathbb{E}^n$ thì:

$$f(x) = f\left(\sum_{i=1}^{n} x_i e_i\right) = \sum_{i=1}^{n} f(e_i) x_i = \sum_{i=1}^{n} u_i e_i$$

trong đó $u = (u_i) = (f(e_i)) \in \mathbb{E}^n$ không phụ thuộc vào x. Công thức

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} u_i e_i, \forall x = (x_i) \in \mathbb{E}^n$$

chính là dạng tổng quát của $f \in (\mathbb{E}^n)^*$.

Không gian l_1

Đặt $e_k = (\delta_{kj})$ thì với mỗi $x = (x_k) \in l_1$ có biểu diễn duy nhất

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} e_k x_k.$$

Giả sử $f \in l_1^*$, $f(e_k) = c_k$ $(k = 1, 2, \ldots)$, suy ra

$$|c_k| \le \|f\|_{l_1} \|e_k\| = \|f\|_{l_1}, \ \forall k$$
$$\Rightarrow \sup_k |c_k| \le \|f\|_{l_1}$$

và có

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} f(e_k) x_k = \sum_{k=1}^{\infty} c_k x_k, \ \forall x \in l_1$$
$$\Rightarrow \|f\|_{l_1} \le \sup_k |c_k| = \|c\|_\infty, \ c = (c_k)$$

Từ đó có $\|f\|_{l_1} = \|c\|_\infty$.

Ngược lại, giả sử $c = (c_k)$ bị chặn, thế thì $\|c\|_\infty < +\infty$. Với mỗi $x \in l_1$, chuỗi $\sum_{k=1}^{\infty} c_k x_k$ hội tụ tuyệt đối. Do đó $f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k x_k$ cho một phiếm hàm tuyến tính trên l_1,

$$|f(x)| \le \sum_{k=1}^{\infty} |c_k||x_k| \le \left(\sup_k |c_k| \right) \|x\|,$$

suy ra f bị chặn và

$$\|f\|_{l_1} \le \sup_k |c_k| = \|c\|_\infty \Rightarrow \|f\|_{l_1} = \|c\|_\infty.$$

Vì vậy dạng tổng quát của $f \in l_1^*$ là

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k x_k, \ \forall x = (x_k) \in l_1,$$

trong đó $c = (c_k) \in l_\infty$ với

$$l_\infty = \{c = (c_k) | \sup_k |c_k| < +\infty\}, \quad \|c\|_\infty = \sup_k |c_k|.$$

Không gian l_p $(p > 1)$

Giả sử $f \in l_p^*$. Dãy $(e_k), e_k = (\delta_{kn})$ là cơ sở của l_p. Do đó với mọi $x = (x_k) \in l_p$ đều có thể biểu diễn duy nhất dưới dạng

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} x_n e_n.$$

Nhờ tính bị chặn của phiếm hàm f, ta có

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f(e_n) x_n.$$

Đặt $f(e_n) = c_n$, thì (c_n) được xác định duy nhất bởi phiếm hàm f và

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n x_n.$$

Ta xét các phần tử dạng $x^{(k)} = (x_n^{(k)})$, trong đó

$$x_n^{(k)} = \begin{cases} |c_n|^{q-1} \operatorname{sign} c_n, & \text{nếu } n \le k \\ 0, & \text{nếu } n > k, \end{cases}$$

với q là số thực thỏa mãn điều kiện $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$. Khi đó

$$f(x^{(k)}) = \sum_{n=1}^{k} |c|^q.$$

Mặt khác

$$f(x^{(k)}) \leq \|f\| \|x^{(k)}\|_p = \|f\| \left(\sum_{n=1}^{k} |c_n|^{(q-1)p} \right)^{\frac{1}{p}}$$
$$= \|f\| \left(\sum_{n=1}^{k} |c_n|^q \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Do đó, $\forall k = 1, 2, \ldots$:

$$\sum_{n=1}^{k} |c_n|^q \leq \|f\| \left(\sum_{n=1}^{k} |c_n|^q \right)^{\frac{1}{p}} \Rightarrow \left(\sum_{n=1}^{k} |c_n|^q \right)^{\frac{1}{q}} \leq \|f\|$$

Từ đó suy ra $(c_n) \in l_q$.

Ngược lại, nếu $(d_n) \in l_q$, thì dễ dàng kiểm tra phiếm hàm cho bởi công thức

$$\phi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} d_n x_n, \ \forall x = (x_n) \in l_p,$$

là phiếm hàm tuyến tính bị chặn trên không gian l_p.

Vì vậy, dạng tổng quát của phiếm hàm tuyến tính bị chặn trên l_p xác định bởi công thức

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n x_n, \ \forall x = (x_n) \in l_p, (c_n) \in l_q.$$

Nhờ bất đẳng thức Holder ta được

$$|f(x)| = \left| \sum_{n=1}^{\infty} c_n x_n \right| \leq \left(\sum_{n=1}^{k} |c_n|^q \right)^{\frac{1}{q}} \left(\sum_{n=1}^{k} |x_n|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$
$$= \left(\sum_{n=1}^{k} |c_n|^q \right)^{\frac{1}{q}} \|x\|_p.$$

Do đó

$$\|f\| \leq \left(\sum_{n=1}^{k} |c_n|^q\right)^{\frac{1}{q}}.$$

Vì vậy

$$\|f\| = \left(\sum_{n=1}^{k} |c_n|^q\right)^{\frac{1}{q}}.$$

Không gian $L_p[0;1]$ $(p > 1)$

Dạng tổng quát của phiếm hàm tuyến tính liên tục f xác định trên không gian $L_p[0;1]$ là

$$f(x) = \int_b^a \alpha(t)x(t)\,dt,\ \forall x \in L_p[0;1],$$

trong đó $\alpha \in L_q[0;1]$, với $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$.

Không gian c_0

Dạng tổng quát của phiếm hàm tuyến tính liên tục f xác định trên không gian c_0 là

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n x_n,\ \forall x = (x_n) \in c_0,$$

trong đó $(c_n) \in l_1$. □

35. Hàm thực p xác định trên không gian vectơ X được gọi là sơ chuẩn nếu:

- $p(\lambda x) = \lambda p(x)$, $\forall x \in X, \forall \lambda > 0$,
- $p(x + y) \leq p(x) + p(y)$, $\forall x, y \in X$.

Hàm thực p xác định trong bài được gọi là một nửa chuẩn, dễ thấy nó cũng là một sơ chuẩn. Sau đây ta sẽ chứng minh bài toán với giả thiết p là một sơ chuẩn.

Trước hết, xét X là một không gian tuyến tính thực. Ta sẽ chỉ ra rằng, nếu f là một phiếm hàm tuyến tính xác định trên không gian con X_0 của X thỏa mãn

$$f(x) \leq p(x), \ \forall x \in X_0$$

thì tồn tại một phiếm hàm tuyến tính F xác định trên X sao cho

$$F(x) = f(x), \ \forall x \in X_0; \quad F(x) \leq p(x), \ \forall x \in X.$$

Ta gọi một suy rộng của f là một phiếm hàm tuyến tính g xác định trên một không gian vectơ con $D_g \supset X_0$ thỏa mãn:

- $g(x) = f(x), \forall x \in X_0$,
- $g(x) \leq p(x), \forall x \in D_g$.

Gọi T là tập hợp tất cả các suy rộng của f. Vì $f \in T$ nên $T \neq \emptyset$. Ta hãy xác định một quan hệ thứ tự bộ phận trên T như sau: với $g_1, g_2 \in T$ thì $g_1 \leq g_2$ nếu $D_{g_1} \subset D_{g_2}$ và $g_1(x) = g_2(x), x \in D_{g_1}$.

Giả sử N là một tập hợp con của T. Tập hợp

$$D^* = \bigcup_{g \in N} D_g$$

là một không gian con của X và $D^* \supset X_0$. Nếu $x \in D^*$ thì tồn tại một $g \in N$ sao cho $x \in D_g$, khi đó đặt $g^*(x) = g(x)$ thì ta được một phiếm hàm tuyến tính g^* có miền xác định là D^* và $g^* \geq g$ với mọi $g \in N$. Vậy mọi tập hợp con sắp thứ tự tuyến tính của N đều có một cận trên trong T.

Theo bổ đề Zorn, tồn tại trong T một phần tử cực đại F. Để chứng minh F là phiếm hàm tuyến tính phải tìm, ta chỉ cần chứng minh miền xác định D của F là toàn bộ không gian X. Thật vậy, nếu $D \neq X$ thì tồn tại $x_0 \in X$ với $x_0 \notin D$. Dễ thấy $x_0 \neq \theta$, kí hiệu $[x_0]$ là không gian vectơ con một chiều của X, sinh bởi x_0. Mọi vectơ $z \in Z = D + [x_0]$ đều có biểu diễn duy nhất dưới dạng

$$z = x + \lambda x_0, \ x \in D \tag{2.17}$$

Lấy x, x' là hai phần tử tùy ý của D, ta có

$$F(x) - F(x') = F(x - x') \leq p(x - x')$$
$$\leq p(x + x_0) + p(-x' - x_0)$$

hay

$$-p(-x' - x_0) - F(x') \leq p(x + x_0) - F(x).$$

Bất đẳng thức này đúng với mọi $x, x' \in D$, do đó

$$\sup_{x' \in D}[-p(-x' - x_0) - F(x')] \leq \inf_{x \in D}[p(x + x_0) - F(x)].$$

Vì vậy tồn tại một hằng số c sao cho

$$-p(-x' - x_0) - F(x') \leq c, \ \forall x' \in D \tag{2.18}$$

và

$$c \leq p(x + x_0) - F(x), \ \forall x \in D. \tag{2.19}$$

Với mọi $z \in Z$ biểu diễn dưới dạng (2.17) ta đặt

$$G(z) = F(x) + \lambda c.$$

Rõ ràng G là một phiếm hàm tuyến tính xác định trên Z và nếu $x \in D$ thì $G(x) = F(x) \leq p(x)$.

Nếu $z \in Z \backslash D$ thì $\lambda \neq 0$. Xét hai trường hợp:

- $\lambda > 0$.
  Bất đẳng thức (2.19) đúng cho mọi $x \in D$, nên

  $$c \leq p(x/\lambda + x_0) - F(x/\lambda).$$

  Nhân cả hai vế với λ ta được

  $$\lambda c \leq p(x + \lambda x_0) - F(x)$$

  hay

  $$F(x) + \lambda c \leq p(x + \lambda x_0)$$

  tức là

  $$G(z) \leq p(z).$$

- $\lambda < 0$.

  Tương tự như trên và sử dụng bất đẳng thức (2.18) ta cũng có

$$G(z) \leq p(z).$$

Suy ra $G \in T, G \geq F$ và $G \neq F$, trái với việc F là một phần tử cực đại của T. Vậy phải có $D = X$.

Cuối cùng ta chứng minh bài toán với trường hợp X là không gian tuyến tính phức. Để ý rằng nếu trong tập hợp các phần tử của một không gian tuyến tính phức ta đưa vào phép nhân vectơ với số thực thì ta được một không gian tuyến tính thực. Gọi $X_{\mathbb{R}}$ và $X_{0\mathbb{R}}$ là các không gian tuyến tính thực thu được từ X và X_0 theo cách đó. Gọi $u(x)$ và $v(x)$ tương ứng là các phần thực và phần ảo của $f(x)$, thì $f(ix) = if(x) = iu(x) - v(x)$ nên $v(x) = -u(ix)$, do đó $f(x) = u(x) - iu(ix)$. Rõ ràng $u(x)$ là phiếm hàm tuyến tính thực trên $X_{0\mathbb{R}}$ và

$$u(x) \leq |u(x)| \leq |f(x)| \leq p(x), \forall x \in X_{0\mathbb{R}}$$

Do đó theo chứng minh trên $u(x)$ có thể khuếch thành một phiếm hàm tuyến tính thực $U(x)$ trên toàn không gian $X_{\mathbb{R}}$ sao cho $U(x) \leq p(x), \forall x \in X_{\mathbb{R}}$. Đặt

$$F(x) = U(x) - iU(ix),$$

ta được một phiếm hàm tuyến tính phức trên X, thỏa mãn điều kiện bài toán. Thật vậy, với mọi $x \in X_0$ ta có

$$F(x) = u(x) - iu(ix) = f(x).$$

Hơn nữa, đặt $F(x) = re^{-i\theta}$ ta có:

$$\begin{aligned} |F(x)| &= e^{i\theta}F(x) = F(e^{i\theta}x) = U(e^{i\theta}x) \\ &\leq p(e^{i\theta}x) = |e^{i\theta}|p(x) = p(x) \end{aligned}$$

Vậy có điều phải chứng minh. □

36. a) Cố định $a_0 \in A, b_0 \in B$, đặt $x_0 = b_0 - a_0$ và gọi $C = A - B + x_0$. Vì A mở nên C mở.
Xét phiếm hàm p trên X xác định như sau:

$$p(x) = \inf\{\lambda > 0 : x \in \lambda C\}.$$

Ta có $0 \le p(x) < 1$, $\forall x \in C, p(x) \ge 1, \forall x \notin C$, hơn nữa, nó là một sơ chuẩn trên X và từ $A \cap B = \emptyset$ suy ra $x_0 \notin C$, do đó $p(x_0) \ge 1$.

Gọi $M = \{tx_0 : t \in \mathbb{R}\}$, thế thì M là không gian con của X. Trên M xét phiếm hàm tuyến tính f xác định như sau

$$f(tx_0) = t, \ \forall tx_0 \in M.$$

Nếu $t \ge 0$ thì $f(tx_0) = t \le tp(x_0) = p(tx_0)$, còn nếu $t < 0$ thì $f(tx_0) < 0 \le p(tx_0)$. Do đó $f \le p$ trên M, theo chứng minh Bài 35, ta có thể khuếch f thành phiếm hàm tuyến tính F xác định trên X sao cho $F \le p$ trên X.

Đặc biệt $F \le 1$ trên C, suy ra $F \ge -1$ trên $-C = \{-x : x \in C\}$. Từ đó ta có $|F| \le 1$ trên $C \cap (-C)$. Vì C mở nên $-C$ mở, do đó $C \cap (-C)$ mở. Như vậy tập hợp này chứa một hình cầu nào đó và F cũng bị chặn trên hình cầu này. Theo Bài 16, F bị chặn trên toàn không gian X hay F liên tục.

Với mọi $a \in A, b \in B$, ta có

$$F(a) - F(b) + 1 = F(a - b + x_0) \le p(a - b + x_0) < 1$$

suy ra $F(a) < F(b)$, do đó $F(A) \cap F(B) = \emptyset$.

Vì A mở và F là phiếm hàm tuyến tính liên tục nên $F(A)$ mở (trong $\mathbb{R}$). Rõ ràng $F(A)$ bị chặn trên, khi đó số $\alpha = \sup F(A)$ chính là số cần tìm.

b) Từ giả thiết suy ra, tồn tại $U \supset A$ và U mở trong X sao cho $U \cap B = \emptyset$. Theo phần a), tồn tại $F \in X^*$ sao cho $F(U) \cap F(B) = \emptyset$ hơn nữa $F(U)$ *"nằm bên trái"* $F(B)$ trong $\mathbb{R}$ ($\sup F(U) \le \inf F(B)$).

Do A compak nên $F(A)$ compak (trong $\mathbb{R}$), do đó tồn tại $c = \max F(A)$ và $F(A)$ là tập hợp con thực sự của $F(U)$. Khi đó trong $F(U)$ có thể lấy được hai số α_1, α_2 sao cho: $c < \alpha_1 < \alpha_2$. Đó là hai số cần tìm. □

37. Trong không gian l_2 xét hai toán tử A, B xác định như sau:

$$\begin{aligned} A: \quad & l_2 \quad \to \quad l_2 \\ & (x_1, x_2, x_3, \ldots) \longmapsto (x_1, 0, x_3, 0, \ldots) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B: \quad & l_2 \quad \to \quad l_2 \\ & (x_1, x_2, x_3, \ldots) \longmapsto (0, x_2, 0, x_4, \ldots). \end{aligned}$$

Toán tử A không compak.Thật vậy, xét dãy $(e_{2n+1})_{n=0}^{\infty} \subset S$-hình cầu đơn vị đóng trong không gian l_2-xác định như sau:

$$e_{2n+1} = \underbrace{(0, 0, \ldots, 1, 0, 0 \ldots)}_{\text{số 1 ở vị trí } 2n+1}, n = 0, 1, \ldots$$

Ta có:

$$Ae_{2n+1} = e_{2n+1}, \ \forall n = 0, 1, \ldots$$

khi đó, từ dãy (Ae_{2n+1}) không thể rút ra được dãy con hội tụ vì:

$$\|Ae_{2n+1} - Ae_{2m+1}\| = \|e_{2n+1} - e_{2m+1}\| = \sqrt{2}, \ \forall n \neq m.$$

Vậy $A(S)$ không là tập hợp compak tương đối, tức A không compak.

Chứng minh tương tự ta cũng có toán tử B không compak. Nhưng ta lại có $A \circ B \equiv \theta$, nên $A + B$ là compak. Từ đó rút ra kết luận cho bài toán. □

Nhận xét:

- Nếu thêm giả thiết X là không gian Banach và A là ánh xạ 1-1 từ X lên Y thì B compak.

Thật vậy, theo nguyên lý ánh xạ mở Banach thì A^{-1} là toán tử tuyến tính liên tục. Suy ra

$$A^{-1} \circ (A \circ B) = B \text{ là toán tử compak.}$$

- Tương tự nếu X là không gian Bananch và B là ánh xạ 1-1 từ X lên Y thì A compak.

38. Trong không gian l_2, xét toán tử:

$$\begin{aligned} A: \quad & l_2 \quad \rightarrow \quad l_2 \\ & (x_1, x_2, x_3, \ldots) \longmapsto (0, x_1, 0, x_3, \ldots) \end{aligned}$$

Tương tự như bài 37, ta có toán tử A không compak. Nhưng

$$A^2 = A \circ A = \theta$$

là toán tử compak. □

39. Bạn đọc tự giải.

Chương 3

Không gian Hilbert

3.1 Tóm tắt lý thuyết

3.1.1 Kiến thức mở đầu về không gian Hilbert

1. Tích vô hướng

Định nghĩa 3.1.1. *Cho không gian tuyến tính X trên trường P (P là trường số thực $\mathbb{R}$ hoặc trường số phức $\mathbb{C}$). Ta gọi là tích vô hướng trên không gian X mọi ánh xạ từ tích Descartes $X \times X$ vào trường P, kí hiệu $(\cdot, \cdot)$, thỏa mãn các tiên đề:*

1) $(\forall x, y \in X)\ \ (y, x) = \overline{(x, y)}$;

2) $(\forall x, y, z \in X)\ \ (x + y, z) = (x, z) + (y, z)$;

3) $(\forall x, y \in X)(\forall \alpha \in P)\ \ (\alpha x, y) = \alpha(x, y)$;

4) $(\forall x \in X)$

$(x, x) > 0$, *nếu* $x \neq \theta$ *(θ là kí hiệu phần tử không),*

$(x, x) = 0$, *nếu* $x = \theta$.

Các phần tử $x, y, z, \ldots$ gọi là các nhân tử của tích vô hướng, số (x, y) gọi là tích vô hướng của hai nhân tử x và y, các tiên đề 1), 2), 3), 4) gọi là hệ tiên đề tích vô hướng.

2. Bất đẳng thức Schawrz

Định lí 3.1.1. ***Bất đẳng thức Schawrz***

$$(\forall x, y \in X)\ |(x, y)| \leq \sqrt{(x, x)}.\sqrt{(y, y)}. \tag{3.1}$$

Với mỗi $x \in X$ ta đặt

$$\|x\| = \sqrt{(x, x)} \tag{3.2}$$

Nhờ bất đẳng thức Schawrz, công thức (3.2) xác định một chuẩn trên không gian X và tích vô hướng là một hàm liên tục của hai biến x và y theo chuẩn (3.2).

Định nghĩa 3.1.2. *Không gian tuyến tính X trên trường P cùng với một tích vô hướng trên X gọi là không gian tiền Hilbert.*

3. Định nghĩa không gian Hilbert

Định nghĩa 3.1.3. *Ta gọi một tập hợp $H \neq \phi$ gồm những phần tử $x, y, z, \ldots$ nào đấy là không gian Hilbert, nếu tập hợp H thỏa mãn các điều kiện:*

1) *H là không gian tuyến tính trên trường P;*

2) *H được trang bị một tích vô hướng;*

3) *H là không gian Banach với chuẩn $\|x\| = \sqrt{(x, x)}$, $x \in H$.*

Ta gọi không gian tuyến tính con đóng của không gian Hilbert H là không gian Hilbert con của không gian H.

3.1.2 Tính trực giao

1. Hai vectơ trực giao

Định nghĩa 3.1.4. *Cho không gian Hilbert H. Hai phần tử $x, y \in H$ gọi là trực giao, kí hiệu $x \perp y$, nếu $(x, y) = 0$.*

Định nghĩa 3.1.5. *Cho không gian Hilbert H và tập hợp $A \subset H, A \neq \phi$. Phần tử $x \in H$ gọi là trực giao với tập hợp A, kí hiệu $x \perp A$, nếu $(\forall y \in A)\ (x, y) = 0$.*

Định lí 3.1.2. ***Định lí Pythagore***

Nếu $x, y \in H$ và $x \perp y$, thì $\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$.

Định lí 3.1.3. ***Định lí hình chiếu lên không gian con***

Cho không gian Hilbert H và H_0 là không gian con của H. Khi đó mỗi phần tử $x \in H$ biểu diễn một cách duy nhất dưới dạng:

$$x = y + z,\ y \in H_0, z \perp H_0.$$

Phần tử y trong biểu diễn gọi là hình chiếu của phần tử x lên H_0.

2. Hệ trực chuẩn

Định nghĩa 3.1.6. *Cho không gian Hilbert H. Một tập hợp (còn gọi là hệ thống) gồm hữu hạn hay đếm được phần tử $(e_n)_{n \geq 1} \subset H$ gọi là hệ trực chuẩn, nếu*

$$(e_i, e_j) = \delta_{ij},$$

trong đó δ_{ij} là kí hiệu Kroneckes, $\delta_{ij} = 0$ với $i \neq j$, $\delta_{ij} = 1$ với $i = j$ $(i, j = 1, 2, ...)$.

Định lí 3.1.4. ***Bất đẳng thức Bessel***

Nếu $(e_n)_{n \geq 1}$ là một hệ trực chuẩn trong không gian Hilbert H, thì

$$(\forall x \in H) \sum_{n \geq 1} |(x, e_n)|^2 \leq \|x\|^2.$$

3. Cơ sở trực chuẩn

Định nghĩa 3.1.7. *Hệ trực chuẩn $(e_n)_{n\geq 1}$ trong không gian Hilbert H gọi là cơ sở trực chuẩn của không gian H, nếu trong không gian H không tồn tại vectơ khác không nào trực giao với hệ đó.*

Định lí 3.1.5. ***Định lí về đẳng thức Parseval***

Cho $(e_n)_{n\geq 1}$ là một hệ trực chuẩn trong không gian Hilbert H. Năm mệnh đề sau tương đương (từ một mệnh đề suy ra bốn mệnh đề còn lại):

1) *$(e_n)_{n\geq 1}$ là cơ sở trực chuẩn của không gian H;*
2) *$(\forall x \in H)\ \ x = \sum_{n\geq 1}(x, e_n)e_n$;*
3) *$(\forall x, y \in H)\ \ (x, y) = \sum_{n\geq 1}(x, e_n)(e_n, y)$ (đẳng thức Parseval);*
4) *$(\forall x, y \in H)\ \ (x, y) = \sum_{n\geq 1} |(x, e_n)|^2$ (phương trình đóng);*
5) *Bao tuyến tính của hệ $(e_n)_{n\geq 1}$ trù mật khắp nơi trong không gian H (nghĩa là tập hợp tất cả các tổ hợp tuyến tính của một số hữu hạn bất kì các phần tử thuộc hệ $(e_n)_{n\geq 1}$ trù mật khắp nơi trong không gian H).*

Định lí 3.1.6. *Không gian Hilbert có cơ sở trực chuẩn khi và chỉ khi không gian đó tách được.*

Định lí 3.1.7. *Hai không gian Hilbert tách được có cùng số chiều đẳng cấu và đẳng cự với nhau.*

3.1.3 Toán tử tuyến tính bị chặn trong không gian Hilbert

1. Dạng tổng quát của phiếm hàm tuyến tính liên tục

Định lí 3.1.8. ***Định lí Riesz***

Mọi phiếm hàm tuyến tính liên tục trên không gian Hilbert H đều có thể biểu diễn duy nhất dưới dạng

$$f(x) = (x, a),\ x \in H,$$

trong đó phần tử $a \in H$ được xác định duy nhất bởi phiếm hàm f và $\|f\| = \|a\|$.

Nhờ định lí Riesz, ta đồng nhất không gian liên hợp H^* với không gian H.

Định lí 3.1.9. *Mọi phiếm hàm tuyến tính liên tục trên không gian $L_p[a,b]$ $(p > 1)$ đều có thể biểu diễn duy nhất dưới dạng*

$$f(x) = \int_a^b x(t)y(t)\,dt,\ x(t) \in L_p[a,b],$$

trong đó hàm số $y(t) \in L_p[a,b]$ $\left(\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1\right)$ được xác định duy nhất bởi phiếm hàm f và $\|f\| = \|y\|_q$.

2. Toán tử liên hợp

Định nghĩa 3.1.8. *Cho A là toán tử tuyến tính bị chặn ánh xạ không gian Hilbert H vào không giàn Hilbert H'. Toán tử B ánh xạ không gian H' vào không gian H gọi là toán tử liên hợp với toán tử A, nếu*

$$(Ax, y) = (x, By),\ \forall x \in H, \forall y \in H'.$$

Toán tử liên hợp B thường được kí hiệu là A^*.

Định lí 3.1.10. *Cho A là toán tử tuyến tính bị chặn ánh xạ không gian Hilbert H vào không gian Hilbert H'. Khi đó tồn tại toán tử A^* liên hợp với toán tử A ánh xạ không gian H' vào không gian H.*

Định lí 3.1.11. *Cho toán tử tuyến tính bị chặn A ánh xạ không gian Hilbert H vào không gian Hilbert H'. Khi đó toán tử liên hợp A^* với toán tử A cũng là toán tử tuyến tính bị chặn và $\|A^*\| = \|A\|$.*

3. Toán tử tự liên hợp

Định nghĩa 3.1.9. *Toán tử tuyến tính bị chặn A ánh xạ không gian Hilbert H vào chính nó gọi là tự liên hợp, nếu*

$$(Ax, y) = (x, Ay), \ \forall x, y \in H.$$

Toán tử tự liên hợp còn gọi là toán tử đối xứng.

Định lí 3.1.12. *Toán tử tuyến tính bị chặn A ánh xạ không gian Hilbert H vào chính nó là tự liên hợp khi và chỉ khi tích vô hướng (Ax, x) là số thực đối với mọi $x \in H$.*

Định lí 3.1.13. *Nếu A là toán tử tự liên hợp ánh xạ không gian Hilbert H vào chính nó, thì*

$$\|A\| = \sup_{\|x\|=1} |(Ax, x)|.$$

4. Sự hội tụ yếu

Định nghĩa 3.1.10. *Cho không gian Hilbert H. Dãy điểm $x_n \subset H$ gọi là hội tụ yếu tới điểm $x \in H$, kí hiệu $x_n \xrightarrow{yếu} x$, nếu với mọi điểm $y \in H$*

$$\lim_{n\to\infty} (x_n, y) = (x, y).$$

Định lí 3.1.14. *Nếu dãy điểm (x_n) trong không gian Hilbert H hội tụ yếu tới điểm $x \in H$ và $\lim\limits_{n\to\infty} \|x_n\| = \|x\|$, thì $\lim\limits_{n\to\infty} \|x_n - x\| = 0$.*

Định lí 3.1.15. *Cho không gian Hilbert H. Dãy điểm $(x_n) \subset H$ hội tụ yếu khi và chỉ khi dãy đó thỏa mãn các điều kiện:*

1) *Dãy điểm (x_n) bị chặn theo chuẩn trong không gian H;*

2) *Dãy số (x_n, y) $(n = 1, 2, \ldots)$ hội tụ với mỗi y thuộc tập hợp trù mật khắp nơi trong không gian H.*

Định nghĩa 3.1.11. *Cho không gian Hilbert H. Tập hợp $K \subset H$ gọi là tập hợp compak yếu trong không gian H, nếu mọi dãy vô hạn $(x_n) \subset K$ đều chứa dãy con hội tụ yếu trong không gian H.*

Định lí 3.1.16. *Nếu tập hợp K bị chặn trong không gian Hilbert H, thì K là tập hợp compak yếu trong không gian H.*

Định lí 3.1.17. *Cho toán tử tuyến tính bị chặn A ánh xạ không gian Hibert H vào không gian Hilbert H'. A là toán tử compak khi và chỉ khi toán tử A ánh xạ dãy hội tụ yếu bất kì trong không gian H thành dãy hội tụ mạnh trong không gian H'.*

3.2 Đề bài tập

1. Cho X là tập hợp tất cả đa thức bậc không vượt số tự nhiên n đã cho. Đối với hai đa thức $p(x), q(x) \in X$ với các hệ số tương ứng a_i, b_j $(j = 0, 1, 2, \ldots)$ ta đặt

$$(p, q) = \sum_{j=0}^{n} a_j \overline{b_j}.$$

Chứng minh tập hợp X cùng với phiếm hàm trên đây lập thành một không gian Hilbert.

2. Cho $L_2(\mathbb{R})$ là tập hợp tất cả các hàm số giá trị thực $x(t)$ đo được theo nghĩa Lebesgues trên toàn tập hợp số thực $\mathbb{R}$ sao cho tồn tại giới hạn (hữu hạn):

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-T}^{T} x^2(t)\, dt,$$

trong đó T là số thực dương tùy ý. Đối với hai hàm số bất kì $x(t), y(t) \in L_2(\mathbb{R})$ ta đặt

$$(x, y) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-T}^{T} x(t)y(t)\, dt.$$

Chứng minh tập hợp $L_2(\mathbb{R})$ cùng với phiếm hàm trên đây lập thành một không gian Hilbert.

3. Chứng minh trong bất đẳng thức Schwarz dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi 2 vectơ phụ thuộc tuyến tính.

4. Cho không gian Hilbert H. Chứng minh bất đẳng thức

$$\|x - u\|\|y - v\| \le \|x - y\|\|u - v\| + \|y - u\|\|x - v\|$$

$$\forall x, y, u, v \in H.$$

5. Cho không gian Hilbert H và các vectơ $x_1, x_2, \ldots, x_n \in H$. Kí hiệu $a_{ij} = (x_i, x_j)$, $i, j = 1, 2, \ldots, n$. Chứng minh định thức Crame $\det a_{ij} \neq 0$ khi và chỉ khi các vectơ $x_1, x_2, \ldots, x_n$ độc lập tuyến tính.

6. Cho không gian Hilbert H và M là không gian con của không gian H. Chứng minh $H \ominus (H \ominus H_0) = M$.

7. Cho dãy số dương (c_n) và tập hợp

$$M = \{x = (x_n) \in l_2 : |x_n| \leq c_n, n = 1, 2, \ldots\}.$$

Chứng minh M là tập hợp compak khi và chỉ khi chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n^2$ hội tụ.

8. Cho E là một tập lồi đóng trong không gian Hilbert H và x là phần tử cố định thuộc không gian H. Chứng minh tồn tại duy nhất phần tử $y \in E$ sao cho

$$\|x - y\| = \min_{u \in E} \|x - u\|.$$

9. Cho H_0 là không gian con của không gian Hilbert H và x là phần tử cố định thuộc H. Chứng minh

$$\min_{u \in H_0} \|x - u\| = \max_{\substack{y \in H \ominus H_0 \\ \|y\| = 1}} |(x, y)|.$$

10. Cho dãy (e_n) là một hệ trực chuẩn trong không gian Hilbert vô hạn chiều H, H_n là không gian con sinh bởi các vectơ $e_1, e_2, \ldots, e_n$ $(n = 1, 2, \ldots)$. Chứng minh với mọi $x \in H$ ta đều có vectơ $y_n = \sum\limits_{j=1}^{n} (x, e_j) e_j$ là hình chiếu của vectơ x lên không gian con H_n và nếu (e_n) là cơ sở trực chuẩn của không gian H thì $\lim\limits_{n \to \infty} \|x - y_n\| = 0$.

11. Chứng minh trong không gian $L_2[0; 2\pi]$, khi áp dụng quá trình trực giao hóa Hilbert-Schmidt đối với các hàm số $\sin mx$, $\cos nx$ $(m = 1, 2, ...; n = 0, 1, 2, ...)$ ta nhận được một cơ sở trực chuẩn.

12. Cho dãy (x_n) là một hệ vectơ đôi một trực giao của không gian Hilbert H. Chứng minh các điều kiện sau là tương đương:

a) Chuỗi $\sum\limits_{n\geq 1} x_n$ hội tụ mạnh;

b) Chuỗi $\sum\limits_{n\geq 1} x_n$ hội tụ yếu;

c) Chuỗi $\sum\limits_{n\geq 1} \|x_n\|^2$ hội tụ.

13. Trên không gian Hilbert l_2 cho các phiếm hàm:

a) $f(x) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} x_k \operatorname{sign}(k - n)$;

b) $f(x) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} |x_k|$;

c) $f(x) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} x_k^2$;

d) $f(x) = \sup_k |x_k|$;

e) $f(x) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} |x_k|^2$;

f) $f(x) = x_n$;

trong đó $x = (x_n) \in l_2, n$ là số nguyên dương cố định: Phiếm hàm nào trong các phiếm hàm trên đây là tuyến tính, liên tục và tìm chuẩn của chúng (nếu tồn tại).

14. Trên không gian Hilbert $L_2[0; 1]$ cho các phiếm hàm:

a) $F(x) = \int_0^1 x(t) \operatorname{sign}\left(t - \frac{1}{2}\right) dt$;

b) $F(x) = \int_0^1 |x(t)|\, dt;$

c) $F(x) = \int_0^1 x(t^2)\, dt;$

d) $F(x) = \sup\limits_{t\in[0;1]} |x(t)|;$

e) $F(x) = \int_0^1 x^2(t)\, dt;$

f) $F(x) = x\left(\dfrac{1}{2}\right).$

Trong các phiếm hàm trên đây, phiếm hàm nào là tuyến tính, liên tục và tìm chuẩn của chúng (nếu tồn tại).

15. Cho dãy (d_n) thỏa mãn điều kiện: chuỗi số $\sum\limits_{n=1}^{\infty} d_n x_n$ hội tụ với mọi $x = (x_n) \in l_2$. Chứng minh dãy số $(d_n) \in l_2$.

16. Cho f là phiếm hàm tuyến tính liên tục trên không gian con H_0 của không gian Hilbert H, $H_0 \neq H$. Chứng minh tồn tại một phiếm hàm tuyến tính liên tục duy nhất thác triển hàm f từ H_0 lên toàn bộ H với chuẩn không tăng và triệt tiêu trên phần bù trực giao $H \ominus H_0$.

17. Cho dãy số phức (a_n). Với mỗi $x = (x_n) \in l_2$ ta đặt $Ax = (a_n x_n)$.

a) Dãy số (a_n) phải thỏa mãn điều kiện gì để $Ax \in l_2, \forall x \in l_2$? Với điều kiện tìm được, chứng minh toán tử A tuyến tính, bị chặn và tìm $\|A\|$.

b) Với điều kiện tìm được ở mục a), dãy số (a_n) phải thỏa mãn thêm điều kiện gì để A là toán tử tự liên hợp?

18. Cho A là toán tử tuyến tính liên tục ánh xạ không gian Hilbert thực H vào chính nó. Toán tử A gọi là xác định dương nếu với mọi $x \in H$ đều có $(Ax, x) \geq m(x, x)$, trong đó m là số dương cố định nào đó. Chứng minh toán tử A là một song ánh và $\|A^{-1}\| \leq m^{-1}$.

19. Cho H_0 là không gian con của không gian Hilbert H, P là toán tử chiếu H lên H_0, A là toán tử tuyến tính liên tục, ánh xạ không gian H vào chính nó. Chứng minh:

a) Không gian con H_0 bất biến đối với toán tử A, nghĩa là $AH_0 \subset H_0$, khi và chỉ khi $P \circ A \circ P = A \circ P$.

b) Các không gian con H_0 và $H \ominus H_0$ bất biến đối với toán tử A khi và chỉ khi $A \circ P = P \circ A$.

20. Cho A là toán tử tuyến tính bị chặn ánh xạ không gian Hilbert H vào chính nó. Chứng minh:

a) Với mọi số phức λ, chuỗi $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \dfrac{\lambda^k A^k}{k!}$ hội tụ trong không gian $I(H, H)$, trong đó $A^0 = I, I$ là toán tử đồng nhất. Tổng của chuỗi đó kí hiệu là $\exp(\lambda A)$, hãy chứng minh:

$$[\exp(\lambda A)]^{-1} = \exp\,(-\lambda A).$$

b) Nếu A là toán tử tự liên hợp và λ là số thực thì $\exp(\lambda A)$ cũng là toán tử tự liên hợp.

21. Cho A là toán tử tuyến tính bị chặn ánh xạ không gian Hilbert H vào chính nó thỏa mãn điều kiện $\|A - I\| < 1$. Chứng minh:

a) Chuỗi $\sum\limits_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}\dfrac{(A-I)^k}{k}$ hội tụ trong không gian $I(H, H)$. Tổng của chuỗi đó kí hiệu là $\log A$. Chứng minh:

b) $\exp(\log A) = A$;

c) Nếu thay toán tử A bằng toán tử tuyến tính bị chặn B ánh xạ không gian H vào chính nó, thì các kết luận ở mục a), b) trên đây còn đúng không? Vì sao?

22. Tìm các toán tử liên hợp với các toán tử cho dưới đây:

a) $Ax = (0, x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots)$, $x = (x_n) \in l_2$;

b) $Ax = (0, x_1, 0, x_2, \ldots)$, $x = (x_n) \in l_2$;

c) $Ax = (0, 0, \ldots, x_k, x_{k+1}, \ldots)$, $x = (x_n) \in l_2$, k là số nguyên dương đã cho;

d) $Ax = (0, 0, a_1x_1, a_2x_2, \ldots)$, $x = (x_n) \in l_2$, (a_n) là dãy số phức đã cho;

Tìm các toán tử liên hợp trên đây (nếu tồn tại).

23. Tìm các toán tử liên hợp với các toán tử cho dưới đây trong không gian $L_2[0;1]$:

a) $(Ax)(t) = \displaystyle\int_0^t x(s)\,ds,\ 0 \le t \le 1, x \in L_2[0;1]$;

b) $(E_\lambda x)(t) = \begin{cases} x(t), & 0 \le t < \lambda; \\ 0, & \lambda \le t \le 1, \lambda \in \mathbb{R}, x \in L_2[0;1]; \end{cases}$

c) $(Ax)(t) = x(t^p)$, $x \in L_2[0;1], p \in \mathbb{R}$ đã cho;

d) $(Ax)(t) = a(t)x(t)$, $x \in L_2[0;1], a(t)$ là hàm số đã cho xác định và bị chặn trên đoạn $[0;1]$.

Tìm các toán tử liên hợp với các toán tử trên đây (nếu tồn tại).

24. Cho các toán tử tuyến tính bị chặn A, A_n $(n = 1, 2, \ldots)$ ánh xạ không gian Hilbert H vào chính nó. Dãy (A_n) gọi là hội tụ yếu tới A, kí hiệu $A_n \xrightarrow{\text{yếu}} A$, nếu $\forall x \in H$ ta đều có $A_n x \xrightarrow{\text{yếu}} Ax$.

Chứng minh, nếu dãy toán tử (A_n) hội tụ yếu tới A và

$$\lim_{n\to\infty} \|A_n x\| = \|Ax\|, \ \forall x \in H,$$

thì dãy $(A_n x)$ hội tụ tới Ax theo chuẩn trong không gian H với mọi $x \in H$.

3.3 Bài tập nâng cao

25. Cho không gian định chuẩn X trên trường P ($P = \mathbb{R}$, $P = \mathbb{C}$), trong đó chuẩn thỏa mãn công thức hình bình hành

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\left(\|x\|^2 + \|y\|^2\right), \ \forall x, y \in X.$$

Chứng minh có thể đưa vào không gian X một tích vô hướng sao cho chuẩn sinh bởi tích vô hướng trùng với chuẩn đã cho trên không gian X.

26. Chứng minh trong không gian $L_2[-1;1]$, khi áp dụng quá trình trực giao hóa Hilbert-Schmidt đối với các đơn thức $1, x, x^2, \ldots$ ta được các đa thức Legendre

$$P_n(x) = c_n \frac{d^n}{dx^n}\left[(x^2-1)^n\right] \ (n = 0, 1, 2 \ldots),$$

trong đó c_n là các hằng số, và các đa thức đó lập thành một cơ sở trực chuẩn.

27. Hãy tìm phần bù trực giao trong không gian $L_2[0;1]$ của các tập hợp sau:

a) Các đa thức của x;

b) Các đa thức của x^2;

c) Các đa thức với các số hạng tự do bằng 0;

d) Các đa thức với tổng các hệ số bằng 0.

28. Chứng minh nếu A là toán tử tuyến tính bị chặn ánh xạ không gian Hilbert H vào chính nó sao cho toán tử tích $A \circ A^*$ là compak thì A là toán tử compak.

29. Chứng minh nếu A là toán tử tự liên hợp ánh xạ không gian Hilbert H vào chính nó sao cho A^n (với n là một số nguyên dương nào đó) là toán tử compak, thì A là toán tử compak.

30. Cho không gian Hilbert H với cơ sở trực chuẩn (e_n) và toán tử A:

$$Ae_i = \sum_{j=1}^{\infty} a_{ij} e_j \ (i = 1, 2, ...).$$

Chứng minh, nếu $\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} |a_{ij}|^2 < +\infty$ thì A là toán tử compak.

3.4 Hướng dẫn giải

1. Bạn đọc tự giải.

2. Bạn đọc tự giải.

3. **Khi:** Giả sử x và y phụ thuộc tuyến tính, tức là tồn tại $\lambda \in P$: $x = \lambda y$. Thế thì:

$$|(x, y)| = |(\lambda y, y)| = |\lambda| \|y\|^2 = \|x\| \|y\|.$$

Chỉ khi: Giả sử $|(x, y)| = \|x\| \|y\|$.

Nếu $y = \theta$: có ngay điều cần chứng minh.

Nếu $y \neq \theta$: Ta có

$$\begin{aligned}
&\left(x - \frac{(x,y)}{(y,y)}y, x - \frac{(x,y)}{(y,y)}y\right) = \\
&= (x,x) - \frac{\overline{(x,y)}}{(y,y)}(x,y) - \frac{(x,y)}{(y,y)}(y,x) + \frac{(x,y)\overline{(x,y)}}{(y,y)^2}(y,y) \\
&= \frac{1}{(y,y)}\left[(x,x)(y,y) - (x,y)\overline{(x,y)}\right] \\
&= \frac{1}{(y,y)}\left[\|x\|^2\|y\|^2 - |(x,y)|^2\right] = 0 \\
&\Rightarrow x - \frac{(x,y)}{(y,y)}y = 0,
\end{aligned}$$

suy ra x và y phụ thuộc tuyến tính. □

4. **Bổ đề:** Với mọi $x, y, z \in H$, ta có

$$(x - y, x - z) + (x - z, x - y) = \|x - y\|^2 + \|x - z\|^2 - \|y - z\|^2.$$

Bạn đọc tự chứng minh bổ đề trên.

Với $x = u$ hoặc $x = y$ hoặc $x = v$, bất đẳng thức hiển nhiên đúng.

Với $x \notin \{u, v, y\}$, ta đặt:

$$a = \frac{x-u}{\|x-u\|^2},\ b = \frac{x-y}{\|x-y\|^2},\ c = \frac{x-v}{\|x-v\|^2}.$$

Ta có

$$\begin{aligned}
\|a-b\|^2 &= (a-b, a-b)\\
&= \|a\|^2 - (a,b) - (b,a) + \|b\|^2\\
&= \frac{1}{\|x-u\|^2} - \frac{1}{\|x-u\|^2\|x-y\|^2}[(x-u, x-y)\\
&\qquad + (x-y, x-u)] + \frac{1}{\|x-y\|^2}\\
&= \frac{1}{\|x-u\|^2\|x-y\|^2}\left[\|x-y\|^2 - \|x-u\|^2 -\right.\\
&\qquad \left. -\|x-y\|^2 + \|u-y\|^2 + \|x-u\|^2\right].\\
&= \frac{\|u-y\|^2}{\|x-u\|^2\|x-y\|^2},
\end{aligned}$$

suy ra

$$\|a-b\| = \frac{\|u-y\|}{\|x-u\|\|x-y\|}.$$

Bằng cách tương tự, ta có:

$$\|b-c\| = \frac{\|y-v\|}{\|x-y\|\|x-v\|},\ \|c-a\| = \frac{\|v-u\|}{\|x-v\|\|x-u\|}.$$

Cuối cùng, từ bất đẳng thức tam giác:

$$\|b-c\| \leq \|a-b\| + \|c-a\|,$$

ta suy ra điều phải chứng minh. □

5. Xét $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ là những số thỏa mãn:

$$\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \ldots + \lambda_n x_n = 0.$$

Thế thì ta có:

$$\lambda_1(x_1, x_j) + \lambda_2(x_2, x_j) + \ldots + \lambda_n(x_n, x_j) = 0,\ j = \overline{1, n} \quad (3.3)$$

Định thức Crame chính là định thức của hệ phương trình tuyến tính thuần nhất (3.3) (ẩn là các số $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$).

Khi: Giả sử các vectơ $x_1, x_2, \ldots, x_n$ độc lập tuyến tính nhưng định thức Crame bằng không, khi đó hệ (3.3) có nghiệm không tầm thường $(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$

$$\begin{aligned}(3.3) &\Rightarrow \left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i, \lambda_j x_j\right) = 0, j = \overline{1, n} \\ &\Rightarrow \left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i, \sum_{j=1}^{n} \lambda_j x_j\right) = 0 \\ &\Rightarrow \left\|\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i\right\|^2 = 0 \\ &\Rightarrow \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i = 0,\end{aligned}$$

suy ra hệ $x_1, x_2, \ldots, x_n$ phụ thuộc tuyến tính, mâu thuẫn. Do vậy định thức Crame phải khác không.

Chỉ khi: Nếu định thức Crame khác không thì hệ phương trình (3.3) chỉ có nghiệm tầm thường, tức $\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_n = 0$, suy ra hệ $x_1, x_2, \ldots, x_n$ độc lập tuyến tính. □

6. Với mọi $x \in M$, ta có $x \perp (H \ominus M)$ nên $x \in H \ominus (H \ominus M)$. Từ đó

$$M \subset H \ominus (H \ominus M). \quad (3.4)$$

Ngược lại, với mọi $x \in H \ominus (H \ominus M)$, ta có biểu diễn

$$x = y + z,\ y \in M, z \in H \ominus M.$$

Ta có $x \perp z$ nên $0 = (x, z) = (y + z, z) = (y, z) + (z, z) = \|z\|^2$, suy ra $z = \theta$ từ đó $x = y \in M$. Vậy

$$H \ominus (H \ominus M) \subset M \tag{3.5}$$

Từ (3.4) và (3.5) suy ra điều phải chứng minh. □

7. Nếu chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} c_n^2$ hội tụ thì

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 > 0) \sum_{n=n_0}^{\infty} c_n^2 < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Gọi $A = \{x = (x_1, x_2, \ldots, x_{n_0}, 0, 0, \ldots) : |x_i| \leq c_i, i = \overline{1, n_0}\}$, ta có A là tập hợp compak và

$$(\forall x \in M)(\exists x' \in A) : \|x - x'\| < \varepsilon \tag{3.6}$$

Thật vậy với mọi $x = (x_n) \in M$, ta chọn $x' \in A$ sao cho n_0 tọa độ đầu tiên trùng với các tọa độ tương ứng của x, còn các tọa độ tiếp theo đều bằng 0. Thế thì

$$\|x - x'\| = \sum_{n=n_0}^{\infty} x_n^2 \leq \sum_{n=n_0}^{\infty} c_n^2 < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Tập hợp A compak, do đó nó hoàn toàn bị chặn, suy ra tồn tại $k \in \mathbb{N}^*$:

$$A \subset \bigcup_{i=1}^{k} S\left(x^{(i)}, \frac{\varepsilon}{2}\right), \text{ trong đó } x^{(i)} \in A$$

Từ đây và từ (3.6) ta suy ra:

$$M \subset \bigcup_{i=1}^{k} S(x^{(i)}, \varepsilon),$$

nghĩa là tập hợp M hoàn toàn bị chặn, hơn nữa nó đóng. Vậy M compak.

Ngược lại, giả sử M compak nhưng $\sum_{n=1}^{\infty} c_n^2 = +\infty$. Thế thì chọn được dãy $(n_k)_{k=1}^{\infty} \subset \mathbb{N}^*$ sao cho:

$$\sum_{i=n_k}^{n_{k+1}-1} c_i^2 > 1, \forall k = 1, 2, \ldots$$

Gọi $x^{(k)} = (0, \ldots, 0, c_{n_k}, \ldots, c_{n_{k+1}-1}, 0, 0, \ldots) \in M$, $\forall k = 1, 2, \ldots$
Khi đó

$$\|x^{(k)} - x^{(k')}\| \geq \sqrt{2}, \ \forall k \neq k'.$$

Dãy $\left(x^{(k)}\right)_{k=1}^{\infty}$ không chứa dãy con nào hội tụ nên M không là tập hợp compak, mâu thuẫn. □

8. Nếu $x \in E$ thì chọn $y = x$, ta được điều phải chứng minh.

Nếu $x \notin E$, gọi $d = d(x, E) = \inf_{u \in E} \|x - u\|$. Vì E đóng nên $d > 0$.
Theo tính chất của cận dưới đúng, ta tìm được dãy $(u_n) \subset E$: $\|x - u_n\| \to d$ khi $n \to \infty$.

Theo đẳng thức hình bình hành:

$$\begin{aligned}
&2\|x - u_n\|^2 + 2\|x - u_m\|^2 = \\
&\quad = \|(x - u_n) + (x - u_m)\|^2 + \|(x - u_n) - (x - u_m)\|^2 \\
&\quad = 4\|x - \frac{u_n + u_m}{2}\|^2 + \|u_n - u_m\|^2
\end{aligned}$$

Vì E là tập lồi nên $\frac{1}{2}(u_n + u_m) \in E$, do đó:

$$\left\|x - \frac{u_n + u_m}{2}\right\| \geq d.$$

Từ đó nhận được $\lim_{n,m \to \infty} \|u_n - u_m\| = 0$, suy ra (u_n) là dãy Cauchy trong E. Nên, tồn tại $y = \lim_{n \to \infty} u_n$, hơn nữa E đóng nên $y \in E$ và

$$\|x - y\| = \lim_{n \to \infty} \|x - u_n\| = d.$$

Để ý rằng $y \in E$, nên đẳng thức trên dẫn tới

$$\|x - y\| = \min_{u \in E} \|x - u\|.$$

Phần tử y là duy nhất, thật vậy, giả sử có

$$y' \in E : \|x - y'\| = \|x - y\|.$$

Theo đẳng thức hình bình hành:

$$\begin{aligned} 4d^2 &= 2\|x - y\|^2 + 2\|x - y'\|^2 \\ &= 4\left\|x - \frac{y + y'}{2}\right\|^2 + \|y - y'\|^2 \\ &\geq 4d^2 + \|y - y'\|^2 \\ &\Rightarrow \|y - y'\|^2 = 0 \Rightarrow y = y' \end{aligned}$$

Vậy ta có điều phải chứng minh. □

9. Nếu $x \in H_0$, ta có ngay điều phải chứng minh.

Nếu $x \notin H_0$, khi đó ta có biểu diễn: $x = u_0 + y_0$ với $u_0 \in H_0$, $y_0 \in H \ominus H_0$, hơn nữa

$$\|y_0\| = \|x - u_0\| = \min_{u \in E} \|x - u\| \tag{3.7}$$

Dễ thấy $y_0 \neq \theta$, khi đó đặt $y_1 = \dfrac{y_0}{\|y_0\|}$. Ta có $y_1 \in H \ominus H_0$, $\|y_1\| = 1$ và với mọi $y \in H \ominus H_0$, $\|y\| = 1$:

$$|(x, y)| = |(u_0 + y_0, y)| = |(y_0, y)| \leq \|y_0\|\|y\| = \|y_0\| = |(x, y_1)|.$$

Suy ra

$$\|y_0\| = |(x, y_1)| = \max_{\substack{y \in H \ominus H_0 \\ \|y\| = 1}} |(x, y)| \tag{3.8}$$

Từ (3.7) và (3.8) suy ra điều phải chứng minh. □

10. Ta có:

$$(y_n, e_i) = (\sum_{i=1}^{n}(x, e_j)e_j, e_i) = (x, e_i), \ \forall i = \overline{1, n},$$

suy ra

$$(x - y_n, e_i) = 0 \ (\forall i = \overline{1, n}) \Rightarrow x - y_n \in H \ominus H_n$$

Từ đó ta có biểu diễn: $x = y_n + (x - y_n)$, với $y_n \in H_n$, $x - y_n \in H \ominus H_n$. Vậy y_n là hình chiếu của x lên H_n.

Nếu (e_n) là cơ sở trực chuẩn thì:

$$x = \sum_{j=1}^{\infty}(x, e_j)e_j$$

và y_n chính là tổng riêng thứ n của chuỗi.

Do đó, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = x$ hay $\lim\limits_{n\to\infty} \|x - y_n\| = 0$. □

11. Ta chứng minh hệ $\sin mx$, $\cos nx$ $(m = 1, 2, \ldots; n = 0, 1, \ldots)$ là hệ trực giao đầy đủ.

Thật vậy, với $m = 1, 2, \ldots; n = 0, 1, \ldots$ và $m \neq n$

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi} \sin mx \sin nx \, dx &= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} [\cos(m-n)x - \cos(m+n)x] \, dx \\ &= \frac{1}{2}\left[\frac{\sin(m-n)x}{m-n} - \frac{\sin(m+n)x}{m+n}\right]\Bigg|_0^{2\pi} = 0;\end{aligned}$$

với $m = 1, 2, \ldots; n = 0, 1, \ldots$, nếu $m \neq n$ thì

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi} \sin mx \cos nx \, dx &= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} [\sin(m+n)x + \sin(m-n)x] \, dx \\ &= -\frac{1}{2}\left[\frac{\cos(m+n)x}{m+n} + \frac{\cos(m-n)x}{m-n}\right]\Bigg|_0^{2\pi} \\ &= 0,\end{aligned}$$

nếu $m = n$, do đó $m \neq 0$, thì

$$\int_0^{2\pi} \sin mx \cos mx \, dx = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \sin 2mx \, dx = -\frac{\cos 4mx}{8m}\Bigg|_0^{2\pi} = 0;$$

cuối cùng, với $m = 1, 2, \ldots; n = 1, 2, \ldots$ và $m \neq n$, thì

$$\int_0^{2\pi} \cos mx \cos nx \, dx = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} [\cos(m+n)x + \cos(m-n)x] \, dx$$
$$= \frac{1}{2}\left[\frac{\sin(m+n)x}{m+n} + \frac{\sin(m-n)x}{m-n}\right]\Bigg|_0^{2\pi} = 0.$$

Nên hệ đã cho trực giao. Tính đầy đủ của hệ được suy ra từ định lí Weierstrass về xấp xỉ một hàm tuần hoàn liên tục bởi các đa thức lượng giác (tức là các hàm số của hệ nói trên). Từ đó suy ra điều phải chứng minh. □

12. a) $\Rightarrow$ b) Hiển nhiên.

b) $\Rightarrow$ c) Xét tổng riêng thứ n của chuỗi đã cho: $S_n = \sum_{k=1}^{n} x_k$. Vì chuỗi hội tụ yếu nên với mỗi $x \in H$, dãy $\{(S_n, x)\}$ hội tụ, suy ra dãy $\{(x, S_n)\}$ cũng hội tụ, do đó bị chặn. Đặt

$$f_n(x) = (x, S_n), \; \forall x \in H,$$

thế thì f_n là một phiếm hàm tuyến tính liên tục và bị chặn từng điểm trên H. Hơn nữa, theo định lí Risez: $\|f_n\| = \|S_n\|$. Lại theo nguyên lí Banach-Steinhaus, thì dãy toán tử (f_n) bị chặn đều, tức là tồn tại $M > 0 : \|f_n\| = \|S_n\| \leq M, \; \forall n$. Từ đó

$$\|S_n\|^2 = (S_n, S_n) = \sum_{k=1}^{n} \|x_k\|^2 \leq M, \; \forall n.$$

Vậy chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\|^2$ hội tụ.

c) $\Rightarrow$ a) Với mọi n, p nguyên dương:

$$\|S_{n+p} - S_n\|^2 = \left\|\sum_{k=1}^{p} x_{k+j}\right\|^2 = \sum_{k=1}^{p} \|x_{k+j}\|^2.$$

Từ đây và từ giả thiết chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\|^2$ hội tụ suy ra (S_n) là dãy cơ bản, mà H là không gian đầy nên $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ hội tụ mạnh. □

13. a) f không xác định trên l_2.

Thật vậy, lấy $x = \left(1, \frac{1}{2}, ..., \frac{1}{k}, ...\right) \in l_2$ nhưng $f(x) = +\infty$.

b) f không tuyến tính.

c) f không tuyến tính.

d) f không tuyến tính.

e) f không tuyến tính.

f) Dễ thấy f tuyến tính và $|f(x)| = |x_n| \leq \|x\|$, $\forall x \in l_2$. Do đó f liên tục và $\|f\| \leq 1$. Mặt khác, lấy $x = e_n = (0, 0, ..., 1, 0, ...)$ (số 1 ở vị trí thứ n) thì $e_n \in l_2$ và $\|e_n\| = 1$. Từ đó $\|f\| \geq |f(e_n)| = 1$.

Vậy $\|f\| = 1$. □

14. a) Dễ thấy F tuyến tính và

$$\begin{aligned}
|F(x)| &= \left|\int_0^1 x(t)\,\mathrm{sign}(t - 1/2)\,dt\right| \\
&\leq \sqrt{\int_0^1 x^2(t)\,dt}\,\sqrt{\int_0^1 \mathrm{sign}^2\left(t - \frac{1}{2}\right)dt} \\
&= \|x\|,\ \forall x \in L_2[0, 1].
\end{aligned}$$

Từ đó suy ra F liên tục và $\|F\| \leq 1$. Mặt khác, lấy $x_0(t) = \operatorname{sign}\left(t - \frac{1}{2}\right)$ thì $x_0 \in L_2[0,1]$ và $\|x_0\| = 1$. Ta có

$$\|F\| \geq |F(x_0)| = \left|\int_0^1 \operatorname{sign}^2\left(t - \frac{1}{2}\right) dt\right| = 1.$$

Vậy $\|F\| = 1$.

b) F không tuyến tính.

c) F không xác định trên $L_2[0;1]$. Thật vậy, xét hàm số

$$x(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt[4]{1-t}}, & 0 \leq t < 1 \\ 0, & t = 1 \end{cases}$$

Ta sẽ chứng minh $x \in L_2[0;1]$ nhưng $F(x) = \infty$.
Xét dãy hàm $\{x_n(t)\}$ xác định như sau

$$x_n(t) = \begin{cases} x^2(t), & 0 \leq t \leq 1 - \dfrac{1}{n} \\ 0, & 1 - \dfrac{1}{n} < t \leq 1 \end{cases}$$

Ta có $\{x_n\}$ là dãy hàm không âm, đo được và hội tụ đến x^2 trên $[0;1]$, hơn nữa

$$\int_0^1 x_n(t)\,dt = \int_0^{1-\frac{1}{n}} x^2(t)\,dt = \int_0^{1-\frac{1}{n}} \frac{1}{\sqrt{1-t}}\,dt$$
$$= -2\sqrt{1-t}\Big|_0^{1-\frac{1}{n}} = 2 - 2\sqrt{\frac{1}{n}} \leq 2$$

do đó dãy tích phân $\displaystyle\int_0^1 x_n(t)\,dt$ bị chặn bởi 2. Suy ra hàm x^2 khả tích và ta cũng có

$$\int_0^1 x^2(t)\,dt = \lim \int_0^1 x_n(t)\,dt = 2.$$

Từ đây suy ra $x \in L_2[0;1]$.

Bây giờ ta xét tích phân

$$F(x) = \int_0^1 x(t^2)\,dt.$$

Giả sử tích phân này tồn tại hữu hạn và có giá trị là M, thế thì ta có

$$\int_0^s x(t^2)\,dt = \int_0^s \frac{dt}{\sqrt[4]{1-t^2}} \le M,\ \forall s \in [0;1).$$

Thực hiện phép đổi biến $t = \sin u$, ta được

$$\begin{aligned}
\int_0^s \frac{dt}{\sqrt[4]{1-t^2}} &= \int_0^r \sqrt{\cos u}\,du, \text{ với } r = \arcsin s \\
&= u\sqrt{\cos u}\Big|_0^r + \frac{1}{2}\int_0^r \frac{u \sin u\,du}{\sqrt{\cos u}} \\
&\le r\sqrt{\cos r} + \frac{1}{2\sqrt{\cos r}}\int_0^r u\sin u\,du \\
&= r\sqrt{\cos r} + \frac{1}{2\sqrt{\cos r}}(\sin r - r\cos r) \\
&= \frac{1}{2\sqrt{\cos r}}(\sin r - r\cos r) \longrightarrow +\infty,
\end{aligned}$$

khi $r \to \frac{\pi}{2}$, ứng với $s \to 1$ (mâu thuẫn).

Do đó $F(x) = +\infty$, tức F không xác định trên $L_2[0;1]$.

d) F không tuyến tính.

e) F không tuyến tính.

f) Xét dãy $(x_n) \subset L_2[0;1]$ xác định như sau

$$x_n(t) = \begin{cases} n, & \text{nếu } t = \dfrac{1}{2} \\ 1, & \text{nếu } t \ne \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

với mọi $n = 1, 2, \ldots$.

Ta có $|F(x_n)| = n, \|x_n\| = 1, \ \forall n = 1, 2, \ldots$, suy ra F không bị chặn. □

15. Với mỗi $m = 1, 2, \ldots$, xét phiếm hàm f_m xác định theo công thức:

$$f_m(x) = \sum_{k=1}^{m} d_k x_k, \ \forall x = (x_n) \in l_2.$$

Dễ thấy f_m tuyến tính, ta sẽ chứng minh f_m bị chặn và tìm chuẩn của nó.

Với mọi $x = (x_n) \in l_2$:

$$|f_m(x)| = \left|\sum_{k=1}^{m} d_k x_k\right| \leq \sqrt{\sum_{k=1}^{m} |d_k|^2} \sqrt{\sum_{k=1}^{m} |x_k|^2} \leq M_m\|x\|,$$

với $M_m = \sqrt{\sum_{k=1}^{m} |d_k|^2}$. Do đó f_m bị chặn và $\|f_m\| \leq M_m$.

Mặt khác, lấy $x = (\overline{d_1}, \overline{d_2}, \ldots, \overline{d_m}, 0, 0, \ldots) \in l_2$, ta có $\|x\| = M_m$ và

$$|f_m(x)| = \sum_{k=1}^{m} |d_k|^2 \leq \|f_m\|\|x\|.$$

Suy ra $\|f_m\| \geqq M_m$. Do đó $\|f_m\| = M_m$.

Với mỗi $x \in l_2$ thì dãy $\{f_m(x)\}_{m=1}^{\infty}$ hội tụ, nghĩa là dãy (f_m) hội tụ từng điểm trên l_2, nên dãy này bị chặn từng điểm trên l_2. Theo định lí Banach-Steinhauss, dãy (f_m) bị chặn đều, tức là tồn tại một số $M \geq 0$ sao cho

$$\|f_m\| = \sqrt{\sum_{k=1}^{m} |d_k|^2} \leq M, \forall m.$$

Từ đó suy ra $(d_n) \in l_2$. □

16. Sự tồn tại

Gọi $P : H \to H_0$ là toán tử chiếu từ H lên H_0. Phiếm hàm $F = f \circ P$ chính là phiếm hàm tuyến tính cần tìm. Thật vậy

- Với mọi $x \in H_0 : F(x_0) = f(Px_0) = f(x_0)$.
- Với mọi $z \in H \ominus H_0 : F(z) = f(Pz) = f(\theta) = 0$.
- Ta có

$$\|F\| = \sup_{\|x\|=1} |F(x)| \geq \sup_{\substack{x \in H_0 \\ \|x\|=1}} |F(x)| = \sup_{\|x\|=1} |f(x)| = \|f\|,$$

mặt khác

$$\|F\| = \|f \circ P\| \leq \|f\|\|P\| = \|f\|.$$

Do đó $\|F\| = \|f\|$.

Tính duy nhất

Giả sử có một phiếm hàm tuyến tính F' cũng thỏa mãn bài toán. Theo định lí Riesz tồn tại $a \in H : F(x) = (x, a),\ \forall x \in H$ và tồn tại $a' \in H : F'(x) = (x, a'),\ \forall x \in H$. Ta có

$$F(x) = F'(x),\ \forall x \in H_0 \cup (H \ominus H_0),$$

suy ra

$$(x, a - a') = 0,\ \forall x \in H_0 \cup (H \ominus H_0).$$

Vậy phải có $a = a'$ hay $F \equiv F'$ trên H. □

17. a) Nếu (a_n) bị chặn thì dễ thấy $Ax \in l_2,\ \forall x \in l_2$.

Nếu (a_n) không bị chặn thì tồn tại dãy con (a_{n_k}) của (a_n) thỏa mãn $|a_{n_k}| > k,\ \forall k$.

Gọi $x = (x_n)$ thỏa mãn

$$x_n = \begin{cases} 0, & \text{nếu } n \neq n_k \\ \dfrac{1}{a_{n_k}}, & \text{nếu } n = n_k \end{cases}$$

Thế thì $x \in l_2$ nhưng $Ax \notin l_2$.

Vậy điều kiện cần và đủ để A là ánh xạ từ l_2 vào chính nó là dãy (a_n) bị chặn.

Ta có:

$$\|Ax\| = \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2 |x_n|^2} \leq M \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2} = M\|x\|,$$

với $M = \sup\limits_n |a_n|$. Suy ra A bị chặn và $\|A\| \leq M$.

Mặt khác, với mọi $\varepsilon > 0$ nhỏ tùy ý, tồn tại $n : |a_n| > M - \varepsilon$ và do đó

$$\|A\| = \sup_{\|x\|=1} \|Ax\| \geq \|Ae_n\| = |a_n| \geq M - \varepsilon.$$

Suy ra $\|A\| \geq M$. Vậy $\|A\| = \sup\limits_n |a_n|$.

b) Dãy (a_n) là dãy số thực bị chặn. □

18. Chứng minh A là song ánh.

Với mọi $x \in H$ mà $Ax = \theta$, ta có

$$0 = (Ax, x) \geq m(x, x) \geq 0 \Rightarrow (x, x) = 0 \Rightarrow x = \theta.$$

Do đó A là đơn ánh. Sau đây ta sẽ chứng minh A là toàn ánh bằng cách chứng minh $A(H) = H$. Trước hết, ta sẽ chứng minh $A(H)$ đóng trong H.

Thật vậy, với mọi dãy $(y_n) \subset A(H)$ và $y_n \to y \in H$ tồn tại $(x_n) \subset H$ sao cho $y_n = Ax_n$, $\forall n = 1, 2, \ldots$. Với mọi n, m nguyên dương

$$\begin{aligned}\|y_n - y_m\|\|x_n - x_m\| &\geq (y_n - y_m, x_n - x_m) \\ &\geq m(x_n - x_m, x_n - x_m) = m\|x_n - x_m\|^2,\end{aligned}$$

suy ra

$$\|y_n - y_m\| \geq m\|x_n - x_m\|.$$

Từ đây nhận được (x_n) là dãy cơ bản trong H, do đó nó hội tụ tới phần tử $x \in H$ nào đó. Dễ thấy $y = Ax$ tức $y \in A(H)$, suy ra $A(H)$ đóng trong H.

Hơn nữa, nếu $z \perp A(H)$ thì

$$0 = (Az, z) \geq m(z, z) = m\|z\|^2 \Rightarrow z = \theta.$$

Suy ra $A(H) = H$ và A là toàn ánh. Từ đó A là song ánh, nên tồn tại ánh xạ ngược A^{-1}. Dễ thấy đây cũng là toán tử tuyến tính từ H vào chính nó.

Với mọi $x \in H$

$$\|Ax\|\|x\| \geq (Ax, x) \geq m(x, x) = m\|x\|^2,$$

do đó

$$\|Ax\| \geq m\|x\|, \forall x \in H.$$

Từ đó nhận được $\|A^{-1}\| \leq m^{-1}$. □

19. **a)** $\Rightarrow$) Giả sử có $A(H_0) \subset H_0$, với mọi $x \in H$, gọi $y = Px$, $z = Ay$. Ta có $y \in H_0$ và do giả thiết nên cũng có $z \in H_0$. Từ đó

$$(P \circ A \circ P)(x) = (P \circ A)(Px) = P(Ay) = P(z) = z$$

và

$$(A \circ P)(x) = A(Px) = Ay = z.$$

Vậy suy ra $P \circ A \circ P = A \circ P$.

$\Leftarrow$) Giả sử có $P \circ A \circ P = A \circ P$, với mọi $x \in H_0$, ta có

$$A(x) = (A \circ P)(x) = (P \circ A \circ P)(x) = P(Ax) \in H_0.$$

Vậy suy ra $A(H_0) \subset H_0$.

b) $\Rightarrow$) Giả sử có $A(H_0) \subset H_0, A(H \ominus H_0) \subset H \ominus H_0$. Với mọi $x \in H$ ta có $x = y + z$, trong đó $y \in H_0, z \in H \ominus H_0$, suy ra $Px = y$. Ta cũng có $Ax = Ay + Az$ và theo giả thiết thì $Ay \in H_0, Az \in H \ominus H_0$, suy ra $P(Ax) = Ay$.

Từ đó ta nhận được

$$(P \circ A)(x) = P(Ax) = Ay = (A \circ P)(x).$$

Vậy $A \circ P = P \circ A$.

$\Leftarrow$) Giả sử có $A \circ P = P \circ A$.

Với mọi $x \in H_0 : Ax = A(Px) = (A \circ P)(x) = (P \circ A)(x) = P(Ax) \in H_0$, suy ra $A(H_0) \subset H_0$.

Với mọi $z \in H \ominus H_0 : P(Az) = A(Pz) = A(\theta) = \theta \Rightarrow Az \in H \ominus H_0$, suy ra $A(H \ominus H_0) \subset H \ominus H_0$.

Vậy có điều phải chứng minh. □

20. a) Ta có

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left\| \frac{\lambda^k A^k}{k!} \right\| \leq \sum_{k=0}^{\infty} \frac{|\lambda|^k \|A\|^k}{k!} = e^{|\lambda|\|A\|},$$

do đó chuỗi $\sum_{k=0}^{\infty} \left\| \frac{\lambda^k A^k}{k!} \right\|$ hội tụ. Do không gian $I(H, H)$ đầy nên chuỗi $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k A^k}{k!}$ hội tụ.

Với $A = \theta$ (kí hiệu toán tử không) ta được $\exp(\theta) = I$. Với mọi λ, λ', ta có

$$\begin{aligned}
\exp(\lambda A)\exp(\lambda' A) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k A^k}{k!} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda'^k A^k}{k!} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{\lambda^k A^k}{k!} \cdot \frac{\lambda'^{n-k} A^{n-k}}{(n-k)!} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda + \lambda')^n A^n}{n!} \\
&= \exp[(\lambda + \lambda')A]
\end{aligned}$$

Cho $\lambda' = -\lambda$ ta được $\exp(\lambda A)\exp(-\lambda A) = \exp(\theta) = I$, từ đó suy ra

$$[\exp(\lambda A)]^{-1} = \exp(-\lambda A).$$

b) Ta có

$$\begin{aligned}(\exp(\lambda A)(x), y) &= \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k A^k}{k!}(x), y\right) = \sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{\lambda^k A^k}{k!}(x), y\right)\\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!}(A^k x, y) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!}(x, A^k y)\\ &= \left(x, \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k A^k}{k!}(y)\right) = (x, \exp(\lambda A)(y))\end{aligned}$$

Vậy có điều phải chứng minh. □

21. Bạn đọc tự giải.

22. a) Dễ thấy A là toán tử tuyến tính bị chặn nên tồn tại toán tử liên hợp A^*.

Với mọi $x = (x_1, x_2, \ldots)$, $y = (y_1, y_2, \ldots)$, ta có

$$\begin{aligned}(Ax, y) &= 0\overline{y_1} + x_1\overline{y_2} + \cdots + x_n\overline{y_{n+1}} + \ldots\\ &= x_1\overline{y_2} + \cdots + x_n\overline{y_{n+1}} + \ldots\\ &= (x, A^*y)\end{aligned}$$

Từ đó suy ra $A^*y = (y_2, y_3, \ldots)$.

b) Ta có

$$\begin{aligned}(Ax, y) &= 0\overline{y_1} + x_1\overline{y_2} + \cdots + 0\overline{y_{2n-1}} + x_n\overline{y_{2n}} + \ldots\\ &= x_1\overline{y_2} + \cdots + x_n\overline{y_{2n}} + \ldots\\ &= (x, A^*y)\end{aligned}$$

Từ đó suy ra $A^*y = (y_2, y_4, \ldots, y_{2n}, \ldots)$.

c) Ta có

$$\begin{aligned}(Ax, y) &= 0\overline{y_1} + \cdots + 0\overline{y_{n-1}} + x_n\overline{y_n} + \ldots \\ &= x_1 0 + \cdots + x_{n-1}0 + x_n\overline{y_n} + \ldots \\ &= (x, A^*y)\end{aligned}$$

Từ đó suy ra $A^*y = (0, 0, \ldots, y_n, y_{n+1}, \ldots) = Ay$. Vậy A là toán tử tự liên hợp.

d) Tương tự như trên ta được

$$A^*y = (\overline{a_1}y_3, \overline{a_2}y_4, \ldots, \overline{a_n}y_{n+2}, \ldots). \ \square$$

23. a) Dễ thấy A là toán tử tuyến tính trong $L_2[0,1]$ và $\forall t \in [0,1]$:

$$\left|\int_0^t x(s)\,ds\right|^2 \le \left(\int_0^1 |x(s)|\,ds\right)^2 \le \int_0^1 |x(s)|^2\,ds = \|x\|^2,$$

Suy ra

$$\int_0^1 \left|\int x(s)\,ds\right|^2 dt \le \|x\|^2$$

hay $\|Ax\|^2 \le \|x\|^2$, nên $\|Ax\| \le \|x\|$. Vậy A là toán tử tuyến tính bị chặn, do đó tồn tại toán tử liên hợp A^*.

Với mọi $x, y \in L_2[0,1]$, ta có

$$\begin{aligned}(Ax, y) &= \int_0^1 (Ax)(t)\overline{y(t)}\,dt = \int_0^1 \left(\int_0^t x(s)\,ds\right)\overline{y(t)}\,dt \\ &= \int_0^1\int_0^t x(s)\overline{y(t)}\,ds\,dt = \int_0^1 x(s)\left(\int_s^1 \overline{y(t)}\,dt\right)ds \\ &= (x, A^*y) = \int_0^1 x(s)\overline{(A^*y)(s)}\,ds\end{aligned}$$

Từ đó

$$(A^*y)(s) = \int_s^1 y(t)\,dt, \ \forall s \in [0,1].$$

b) Dễ thấy E_λ là toán tử tuyến tính bị chặn trong $L_2[0,1]$, do đó tồn tại toán tử liên hợp E_λ^*.

Với mọi $x, y \in L_2[0,1]$, ta có

$$\begin{aligned}(E_\lambda x, y) &= \int_0^1 (E_\lambda x)(t)\overline{y(t)}\,dt \\ &= \int_0^\lambda x(t)\overline{y(t)}\,dt + \int_\lambda^1 0\cdot\overline{y(t)}\,dt \\ &= \int_0^\lambda x(t)\overline{y(t)}\,dt + \int_\lambda^1 x(t)\cdot 0\,dt \\ &= (x, E_\lambda^* y) = \int_0^1 x(t)\overline{(E_\lambda^* y)(t)}\,dt\end{aligned}$$

Từ đó

$$(E_\lambda^* y)(t) = \begin{cases} y(t), & 0 \le t < \lambda \\ 0, & \lambda \le t \le 1,\ y \in L_2[0.1] \end{cases}$$

Vậy E_λ là toán tử tự liên hợp.

c) Ta có A là toán tử tuyến tính bị chặn trong không gian $L_2[0;1]$ nên tồn tại toán tử liên hợp A^*.

Với mỗi $x, y \in L_2[0;1]$, ta có

$$\begin{aligned}(Ax, y) &= \int_0^1 x(t^p)\overline{y(t)}\,dt \\ &= \int_0^1 x(u)\overline{y(u^{\frac{1}{p}})}\frac{du}{pu^{\frac{p-1}{p}}}, \quad (\text{đổi biến } u = t^p) \\ &= \int_0^1 x(t)\overline{\left[\frac{y(t^{\frac{1}{p}})}{pt^{\frac{p-1}{p}}}\right]}\,dt \\ &= (x, A^* y) = \int_0^1 x(t)\overline{(A^* y)(t)}\,dt\end{aligned}$$

Từ đó suy ra

$$(A^*y)(t) = \frac{y(t^{\frac{1}{p}})}{pt^{\frac{p-1}{p}}},\ y \in L_2[0;1].$$

d) $(A^*y)(t) = \overline{a(t)}y(t),\ y \in L_2[0,1]$. $\square$

24. Bạn đọc tự giải.

25. Trường hợp $P = \mathbb{R}$

Với trường hợp này, tích vô hướng trong X xác định như sau:

$$(x,y) = \frac{1}{4}(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2),\ \forall x, y \in X.$$

Thật vậy, ta sẽ chứng minh nó thỏa mãn bốn tiên đề về tích vô hướng.

a) Dễ thấy $(y,x) = (x,y),\ \forall x, y \in X$.

b) Với mọi $x, y, z \in X$, ta có:

$$\begin{aligned}
&(x+y,z) = \\
&= \frac{1}{4}(\|x+y+z\|^2 - \|x+y-z\|^2) \\
&= \frac{1}{4}\left[(\|x+y+z\|^2 - \|x-y+z\|^2)\right. \\
&\qquad\qquad\qquad\left. + (\|x-y+z\|^2 + \|x+y-z\|^2\right] \\
&= \frac{1}{2}\left[(\|x+z\|^2 + \|y\|^2) - (\|x\|^2 + \|y-z\|^2)\right] \\
&= \frac{1}{2}(\|x+z\|^2 - \|x\|^2 - \|z\|^2) + \frac{1}{2}(\|y\|^2 + \|z\|^2 - \|y-z\|^2) \\
&= \frac{1}{4}(\|x+z\|^2 - \|x-z\|^2) + \frac{1}{4}(\|y+z\|^2 - \|y-z\|^2) \\
&= (x,z) + (y,z)
\end{aligned}$$

c) Với mỗi $x, y \in X$, hàm số (biến số α) $f(\alpha) = (\alpha x, y)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và cộng tính (suy ra từ b)). Do đó f phải có

dạng: $f(\alpha) = C\alpha, C$ là hằng số. Thay $\alpha = 1$ vào ta được $C = f(1) = (x, y)$.
Vậy $(\alpha x, y) = \alpha(x, y)$.

d) Ta có $(x, x) = \|x\|^2$ nên $(x, x) \geq 0$, $(x, x) = 0 \Leftrightarrow x = \theta$.

Trường hợp $P = \mathbb{C}$

Tích vô hướng trong X xác định như sau:

$$(x, y) = \frac{1}{4}(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2 + i\|x+iy\|^2 - i\|x-iy\|^2),\ \forall x, y \in X.$$

Ta kiểm tra các tiên đề về tích vô hướng.

a) Với mọi $x, y \in X$:

$$\begin{aligned}
(y, x) &= \frac{1}{4}(\|y + x\|^2 - \|y - x\|^2 + i\|y + ix\|^2 - i\|y - ix\|^2) \\
&= \frac{1}{4}(\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2 + \\
&\qquad\qquad + i\|i(x - iy)\|^2 - i\|i(x + iy)\|^2) \\
&= \frac{1}{4}(\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2 + i\|x - iy\|^2 - i\|x + iy\|^2) \\
&= \overline{(x, y)}.
\end{aligned}$$

b) Chứng minh tương tự như trường hợp đầu.

c) Tương tự như trên ta xét hàm số $f(\alpha) = (\alpha x, y)$ liên tục và cộng tính. Do đó $f(\alpha) = C\alpha, \forall \alpha$ hoặc $f(\alpha) = C\overline{\alpha}$, $\forall \alpha$. Thay $\alpha = 1$ ta được $C = (x, y)$ và từ đẳng thức $(ix, y) = i(x, y)$ ta suy ra $(\alpha x, y) = \alpha(x, y)$.

d) Tương tự như trên. □

26. Ta có hệ $1, x, x^2, \ldots$ độc lập tuyến tính trong không gian $L_2[-1; 1]$, nên nhờ quá trình trực giao hóa Hilbert-Schmidt, hệ này sẽ trở thành một hệ trực chuẩn và kí hiệu là

$$e_0, e_1, e_2, \ldots.$$

Dễ thấy rằng e_n, $n = 0, 1, \dots$ là đa thức bậc n và $e_0 = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$. Tiếp theo ta chứng minh hệ $(Q_n)_{n=0}^{\infty}$ với

$$Q_n(x) = \frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n$$

trực giao trong không gian $L_2[-1;1]$, do đó là một hệ độc lập tuyến tính.

Thật vậy, xét hai phần tử bất kì không trùng nhau Q_n, Q_m và giả sử $m < n$. Ta có

$$\frac{d^k}{dx^k}(x^2-1)^n\Big|_{x=-1} = \frac{d^k}{dx^k}(x^2-1)^n\Big|_{x=1} = 0,\ k = 0, 1, \dots, n-1$$

nên khi áp dụng phương pháp tích phân từng phần ta được

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{1} Q_m(x)Q_n(x)\,dx &= -\int_{-1}^{1} \frac{d^{m+1}}{dx^{m+1}}(x^2-1)^m \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}(x^2-1)^n\,dx \\ &= \dots \\ &= (-1)^n \int_{-1}^{1} \left[\frac{d^{m+n}}{dx^{m+n}}(x^2-1)^m\right](x^2-1)^n\,dx \\ &= 0\end{aligned}$$

Từ đó suy ra hệ $(Q_n)_{n=0}^{\infty}$ trực giao.

Sau đây ta sẽ chứng minh Q_n và e_n phụ thuộc tuyến tính với mọi $n = 0, 1, \dots$. Rõ ràng điều này đúng với $n = 0$. Giả sử nó đúng đến n, ta chứng minh nó đúng đến $n+1$. Thật vậy, trong không gian E^{n+1} bao gồm tất cả các đa thức bậc $n+1$ thì hệ $\{e_0, e_1, \dots, e_{n+1}\}$ là hệ độc lập tuyến tính tối đại. Với mỗi $k = \overline{0, n}$ thì Q_{n+1} và Q_k độc lập tuyến tính, mà Q_k và e_k phụ thuộc tuyến tính, nên Q_{n+1} và e_k độc lập tuyến tính. Nhưng vì $Q_{n+1} \in E^{n+1}$ nên ta phải có Q_{n+1} và e_{n+1} phụ thuộc tuyến tính. Theo nguyên lí quy nạp ta nhận được khẳng định trên.

Từ đó bằng cách lấy c_n sao cho $|c_n| = \dfrac{1}{\|Q_n\|}$, ta có hệ (P_n) trùng với hệ (e_n). Nên nhờ quá trình trực giao hóa Hilbert-Schmidt hệ $1, x, x^2, \dots$, ta nhận được hệ trực chuẩn (P_n).

Không gian $E \subset L_2[-1;1]$ bao gồm tất cả các đa thức xác định trên đoạn $[-1;1]$ trù mật trong không gian $C \subset L_2[-1;1]$ bao gồm tất cả các hàm số liên tục trên đoạn $[-1;1]$, còn C lại trù mật khắp nơi trong $L_2[-1;1]$ (bạn đọc tự chứng minh điều này). Do đó E trù mật khắp nơi trong $L_2[-1;1]$. Hệ $1, x, x^2, \ldots$ là một hệ sinh của E, suy ra hệ (P_n) cũng là một hệ sinh của E. Từ đó, với mỗi $x \in L_2[-1;1]$ ta có thể xấp xỉ x bởi một tổ hợp tuyến tính những phần tử của hệ (P_n) với độ chính xác tùy ý, vì vậy ta có thể đồng nhất chúng với nhau. Suy ra (P_n) là một hệ trực chuẩn đủ, nên (P_n) là một cơ sở trực chuẩn của $L_2[-1;1]$. $\square$

27. a) Tập hợp P tất cả các đa thức của x làm thành một không gian con của không gian $L_2[0;1]$. Hơn nữa P trù mật khắp nơi trong $L_2[0;1]$. Giả sử $y \in L_2[0;1]$ trực giao với P, thế thì y cũng trực giao với mọi $z \in L_2[0;1]$. Thật vậy, tồn tại $(z_n) \subset P$ và $\lim z_n = z$. Khi đó $(z, y) = \lim(z_n, y) = \lim 0 = 0$. Do đó y cũng trực giao với y, từ đó $y = \theta$.

Vậy phần bù trực giao của P là $\{\theta\}$.

b) Tập hợp P_1 các đa thức của x^2 lập thành một không gian con của $L_2[0;1]$. Hệ $1, \cos \pi x, \cos 2\pi x, \ldots, \cos n\pi x, \ldots$ (1) là một hệ trực giao đủ trong $L_2[0;1]$ (bạn đọc tự chứng minh điều này). Hơn nữa từ khai triển hàm cos thành chuỗi lũy thừa, ta suy ra mỗi phần tử của hệ (1) đều là giới hạn của một dãy các phần tử nào đó trong P_1. Từ đó nếu $y \in L_2[0;1]$ trực giao với P_2 thì nó cũng trực giao với hệ (1), vì thế cũng trực giao với $L_2[0;1]$. Suy ra $y = 0$.

Vậy phần bù trực giao của P_1 là $\{\theta\}$.

c) Tập hợp P_2 các đa thức với số hạng tự do bằng 0 làm thành một không gian con của $L_2[0;1]$. Hệ $\sin \pi x, \sin 2\pi x, ..., \sin n\pi x, ...$ (2) là một hệ trực giao đủ trong $L_2[0;1]$. Hơn nữa từ khai triển hàm sin thành chuỗi lũy thừa, ta suy ra mỗi phần tử của hệ (2) đều là giới hạn của một dãy các phần tử nào đó trong P_2. Từ đó nếu $y \in L_2[0;1]$ trực giao với P_2 thì nó cũng trực giao với hệ (1), vì thế cũng trực giao với $L_2[0;1]$. Suy ra $y = 0$.

Vậy phần bù trực giao của P_2 là $\{\theta\}$.

d) Bạn đọc tự giải. □

28. Giả sử (x_n) là một dãy phần tử bất kì trong hình cầu đơn vị đóng của không gian Hilbert H. Theo giả thiết, $A \circ A^*$ là toán tử compak nên từ dãy $(A(A^*x_n))$ lấy ra được một dãy con $(A(A^*x_{n_k}))$ hội tụ trong H. Do đó $(A(A^*x_{n_k})$ cũng là một dãy Cauchy và

$$\begin{aligned}\|A^*x_{n_k} - A^*x_{m_k}\|^2 &= (A^*(x_{n_k} - x_{m_k}), A^*(x_{n_k} - x_{m_k}))\\ &= (x_{n_k} - x_{m_k}, A(A^*(x_{n_k} - x_{m_k})))\\ &\le \|x_{n_k} - x_{m_k}\|\|A(A^*(x_{n_k} - x_{m_k}))\|\\ &\le 2\|A(A^*x_{n_k}) - A(A^*x_{m_k})\| \to 0, \text{khi } k \to \infty\end{aligned}$$

Từ đó suy ra $(A^*x_{n_k})$ là một dãy Cauchy trong không gian đầy H, do đó nó hội tụ. Suy ra A^* là toán tử compak, nên $A^* \circ A$ cũng compak. Lặp lại quá trình tương tự như trên ta nhận được A là toán tử compak. □

29. Trước hết ta thấy rằng nếu A là toán tử tự liên hợp thì A^k cũng là toán tử tự liên hợp với mọi $k = 1, 2, \ldots$. Lại theo bài 28 ta suy ra nếu A là một toán tử tự liên hợp bất kì thì từ $A^2 = A \circ A^*$ compak ta sẽ có A compak. Bây giờ giả sử với $n \in \mathbb{N}^*$ nào đó ta có A^n compak, trong đó A tự liên hợp. Thế thì $A^{2^n} = A^n \circ A^{2^n - n}$ cũng là toán tử compak. Theo nhận xét ở trên thì toán tử $A^{2^{n-1}}$ tự liên hợp và $\left(A^{2^{n-1}}\right)^2 = A^{2^n}$ compak, do đó $A^{2^{n-1}}$ compak. Lập luận tương tự, sau n bước ta nhận được A là toán tử compak. □

30. Với mỗi $n = 1, 2, \ldots$, xét toán tử A_n xác định như sau:

$$A_n e_i = \begin{cases} \sum_{j=1}^{\infty} a_{ij} e_j, & 1 \le i \le n \\ \theta, & i > n \end{cases}$$

Dễ thấy A_n là toán tử tuyến tính liên tục hữu hạn chiều, do đó nó là toán tử compak. Với mọi $x \in H$ ta có $\sum_{i=1}^{\infty}(x, e_i)e_i$ và

$$Ax = \sum_{i=1}^{\infty}(x, e_i)Ae_i, \quad A_nx = \sum_{i=1}^{n}(x, e_i)Ae_i,$$

suy ra

$$\begin{aligned} A_nx - Ax &= \sum_{i=n+1}^{\infty}(x, e_i)Ae_i = \sum_{i=n+1}^{\infty}(x, e_i)\sum_{j=1}^{\infty}a_{ij}e_j \\ &= \sum_{j=1}^{\infty}\left[\sum_{i=n+1}^{\infty}(x, e_i)a_{ij}\right]e_j \end{aligned}$$

Từ đó

$$\begin{aligned} \|A_nx - Ax\|^2 &= \sum_{j=1}^{\infty}\left|\sum_{i=n+1}^{\infty}(x, e_i)a_{ij}\right|^2 \\ &\leq \sum_{j=1}^{\infty}\left[\sum_{i=n+1}^{\infty}(x, e_i)^2\sum_{i=n+1}^{\infty}|a_{ij}|^2\right] \\ &\leq \|x\|^2\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{i=n+1}^{\infty}|a_{ij}|^2 \\ &= \|x\|^2\sum_{i=n+1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}|a_{ij}|^2 \\ \Rightarrow \|A_n - A\| &\leq \sqrt{\sum_{i=n+1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}|a_{ij}|^2} \qquad (3.9) \end{aligned}$$

Chuyển qua giới hạn trong (3.9) khi $n \to \infty$ ta được

$$\lim_{n\to\infty}\|A_n - A\| = 0.$$

Vậy A là giới hạn theo chuẩn của dãy toán tử compak (A_n), do đó A là toán tử compak. □

Chương 4

Phổ của toán tử tuyến tính bị chặn

4.1 Tóm tắt lý thuyết

4.1.1 Phổ của toán tử tuyến tính bị chặn trong không gian Banach

Cho không gian định chuẩn X trên trường P (P là trường số thực $\mathbb{R}$ hoặc trường số phức $\mathbb{C}$), toán tử tuyến tính bị chặn A ánh xạ không gian X vào chính nó (hay toán tử A tác dụng trong không gian X), phương trình

$$(A - \lambda I)x = y, \tag{4.1}$$

trong đó $x, y \in X$, y là phần tử đã cho, x là phần tử cần tìm, λ là tham số thuộc P, I là toán tử đồng nhất.

Định nghĩa 4.1.1. *Số $\lambda \in P$ gọi là giá trị chính quy (hay điểm chính quy) của toán tử A, nếu tồn tại toán tử $R_\lambda = (A - \lambda I)^{-1}$ xác định và bị chặn trên toàn không gian X. Số λ gọi là giá trị phổ (hay điểm phổ) của toán tử A, nếu số λ không là giá trị chính quy của toán tử A. Tập hợp tất cả giá trị phổ của toán tử A gọi là phổ của toán tử A.*

Định lí 4.1.1. *Cho các toán tử tuyến tính bị chặn A, B tác dụng trong không gian Banach X sao cho toán tử A có toán tử ngược bị chặn A^{-1} và toán tử B thoả mãn điều kiện $||B|| < \dfrac{1}{||A^{-1}||}$.*

Khi đó toán tử $A + B$ có toán tử ngược bị chặn.

Từ định lí trên suy ra mệnh đề sau:

Nếu số $\lambda_0 \in P$ là giá trị chính quy của toán tử A, thì $\forall\lambda \in P$ thỏa mãn điều kiện:

$$|\lambda_0 - \lambda| < \frac{1}{||(A - \lambda_0 I)^{-1}||}$$

đều là giá trị chính quy của toán tử A.

Định lí 4.1.2. *Cho toán tử tuyến tính bị chặn A tác dụng trong không gian Banach X và số $\lambda \in P$ thỏa mãn điều kiện $|\lambda| > ||A||$. Khi đó số λ là giá trị chính quy của toán tử A và toán tử giải R_λ có biểu diễn dạng:*

$$R_\lambda = (A - \lambda I)^{-1} = -\frac{1}{\lambda}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{A^k}{\lambda^k}. \tag{4.2}$$

Định lí 4.1.3. *Nếu toán tử compak A tác dụng trong không gian Banach X, thì với mọi số $\alpha > 0$ toán tử A chỉ có hữu hạn vector riêng độc lập tuyến tính tương ứng với giá trị riêng λ mà $|\lambda| \geq \alpha$.*

4.1.2 Phổ của toán tử tuyến tính bị chặn trong không gian Hilbert

Cho toán tử tự liên hợp A tác dụng trong không gian Hilbert H.

Định lí 4.1.4. *Các giá trị riêng của toán tử tự liên hợp A đều là số thực.*

Định lí 4.1.5. *Hai vector riêng của toán tử tự liên hợp A tương ứng với hai giá trị riêng khác nhau thì trực giao với nhau.*

Định lí 4.1.6. *Số λ là giá trị chính quy của toán tử tự liên hợp A khi và chỉ khi*

$$(\exists\alpha > 0)(\forall x \in H)\ ||(A - \lambda I)x|| \geq \alpha||x||. \tag{4.3}$$

Từ định lí suy ra: Số λ thuộc phổ của toán tử tự liên hợp A khi và chỉ khi $\exists(x_n) \subset H, ||x_n|| = 1$ $(n = 1, 2, ...)$ sao cho

$$\lim_{n\to\infty} ||(A - \lambda I)x_n|| = 0. \tag{4.4}$$

Định lí 4.1.7. *Mọi số phức $\lambda = a + bi$ với $b \neq 0$ đều là giá trị chính quy của toán tử tự liên hợp A.*

Định lí 4.1.8. *Phổ của toán tử tự liên hợp A là khác rỗng.*

Định lí 4.1.9. *Phổ của toán tử tự liên hợp A nằm trên đoạn $[m; M]$, trong đó*

$$m = \inf_{||x||=1} (Ax, x), \quad M = \sup_{||x||=1} (Ax, x).$$

Định lí 4.1.10. *Phổ của toán tử compak tự liên hợp tác dụng trong không gian Hilbert H chỉ gồm giá trị riêng.*

Từ định lí suy ra: Nếu toán tử compak tự liên hợp A tác dụng trong không gian Hilbert H có vô số giá trị riêng, thì tập hợp giá trị riêng là đếm được và số 0 là điểm giới hạn duy nhất của tập hợp giá trị riêng đó.

4.2 Đề bài tập

1. Tìm phổ của toán tử Voltere

$$(Ax)(t) = \int_0^t x(s)\,ds,\ 0 \le t \le 1, x \in C[0;1]$$

tác dụng trong không gian $C[0;1]$.

2. Cho toán tử

$$Ax = (x_2, x_3, \ldots),\ x = (x_1, x_2, \ldots) \in l_p,\ 1 \le p \le +\infty.$$

Hãy tìm phổ của toán tử A.

3. Cho toán tử

$$Ax = (0, x_1, x_2, \ldots),\ x = (x_1, x_2, \ldots) \in l_p,\ 1 \le p \le +\infty.$$

Hãy tìm phổ của toán tử A.

4. Tìm phổ của toán tử Volterre

$$(Ax)(t) = \int_0^t x(s)\,ds,\ 0 \le t \le 1, x \in L_2[0;1]$$

tác dụng trong không gian $L_2[0;1]$.

5. Tìm phổ của toán tử chiếu không gian Hilbert H lên không gian con $H_0 \subset H$ và các vectơ riêng của toán tử đó.

4.3 Bài tập nâng cao

6. Tìm phổ của toán tử bước nhảy:

$$(Ax)(t) = x(t+h),\ x \in L_2(\mathbb{R}), h = \text{const}$$

tác dụng trong không gian $L_2(\mathbb{R})$.

4.4 Hướng dẫn giải

1. Kí hiệu phổ của A là $\sigma(A)$. Xét phương trình $Ax - \lambda x = y$, hay

$$\int_0^t x(s)\,ds - \lambda x(t) = y(t) \tag{4.5}$$

Nếu $\lambda = 0$, phương trình (4.5) không có nghiệm nếu y liên tục trên đoạn $[0;1]$ nhưng không khả vi trên đoạn đó. Suy ra $0 \in \sigma(A)$.

Xét $\lambda \neq 0$, đặt

$$(Fx)(t) = -\left[\frac{1}{\lambda^2} e^{\frac{t}{\lambda}} \int_0^t x(u) e^{-\frac{u}{\lambda}}\,du + \frac{1}{\lambda} x(t)\right],$$

trong đó $t \in [0;1], x \in C[0;1]$.

Ta có F là toán tử tuyến tính bị chặn tác dụng trong không gian $C[0;1]$. Bây giờ ta sẽ chứng minh F chính là toán tử giải của A (ứng với λ), tức là chứng minh

$$[F(A - \lambda I)](x) = [(A - \lambda I)F](x) = x,\ \forall x \in C[0;1]. \tag{4.6}$$

Thật vậy

$$\begin{aligned}
[F(A - \lambda I)x](t) &= F(Ax)(t) - \lambda(Fx)(t)\\
&= -\frac{1}{\lambda^2} e^{\frac{t}{\lambda}} \int_0^t \left[\int_0^u x(s)\,ds\right] e^{-\frac{u}{\lambda}}\,du - \frac{1}{\lambda}\int_0^t x(s)\,ds\\
&\quad + \frac{1}{\lambda} e^{\frac{t}{\lambda}} \int_0^t x(u) e^{-\frac{u}{\lambda}}\,du + x(t)\\
&= \frac{1}{\lambda} e^{\frac{t}{\lambda}} \int_0^t \left[\int_0^u x(s)\,ds\right] d(e^{-\frac{u}{\lambda}}) - \frac{1}{\lambda}\int_0^t x(s)\,ds\\
&\quad - \frac{1}{\lambda}\int_0^t x(s)\,ds + \frac{1}{\lambda} e^{\frac{t}{\lambda}} \int_0^t x(u) e^{-\frac{u}{\lambda}}\,du + x(t)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \left[\frac{1}{\lambda} e^{\frac{t}{\lambda}} e^{-\frac{u}{\lambda}} \int_0^u x(s)\, ds\right]\Bigg|_{u=0}^{u=t} - \frac{1}{\lambda} e^{\frac{t}{\lambda}} \int_0^t x(u) e^{-\frac{u}{\lambda}}\, du \\
&\quad - \frac{1}{\lambda}\int_0^t x(s)\, ds + \frac{1}{\lambda} e^{\frac{t}{\lambda}} \int_0^t x(u) e^{-\frac{u}{\lambda}}\, du + x(t) \\
&= \frac{1}{\lambda}\int_0^t x(s)\, ds - \frac{1}{\lambda} e^{\frac{t}{\lambda}} \int_0^t x(u) e^{-\frac{u}{\lambda}}\, du \\
&\quad - \frac{1}{\lambda}\int_0^t x(s)\, ds + \frac{1}{\lambda} e^{\frac{t}{\lambda}} \int_0^t x(u) e^{-\frac{u}{\lambda}}\, du + x(t) \\
&= x(t),
\end{aligned}
$$

và

$$
\begin{aligned}
[(A - \lambda I)Fx](t) &= A(Fx)(t) - \lambda (Fx)(t) \\
&= -\int_0^t \left[\frac{1}{\lambda^2} e^{\frac{u}{\lambda}} \int_0^u x(s) e^{-\frac{s}{\lambda}}\, ds + \frac{1}{\lambda} x(u)\right] du \\
&\quad + \frac{1}{\lambda} e^{\frac{t}{\lambda}} \int_0^t x(u) e^{-\frac{u}{\lambda}}\, du + x(t) \\
&= -\int_0^t \left[\int_0^u x(s) e^{-\frac{s}{\lambda}}\, ds\right] d\left(\frac{1}{\lambda} e^{\frac{u}{\lambda}}\right) \\
&\quad - \frac{1}{\lambda}\int_0^t x(u)\, du + \frac{1}{\lambda} e^{\frac{t}{\lambda}} \int_0^t x(u) e^{-\frac{u}{\lambda}}\, du + x(t) \\
&= -\left[\frac{1}{\lambda} e^{\frac{u}{\lambda}} \int_0^u x(s) e^{-\frac{s}{\lambda}}\, ds\right]\Bigg|_{u=0}^{u=t} + \int_0^t \frac{1}{\lambda} e^{\frac{u}{\lambda}} e^{-\frac{u}{\lambda}} x(u)\, du \\
&\quad - \frac{1}{\lambda}\int_0^t x(u)\, du + \frac{1}{\lambda} e^{\frac{t}{\lambda}} \int_0^t x(u) e^{-\frac{u}{\lambda}}\, du + x(t) \\
&= -\frac{1}{\lambda} e^{\frac{t}{\lambda}} \int_0^t x(u) e^{-\frac{u}{\lambda}}\, du + \frac{1}{\lambda}\int_0^t x(u)\, du \\
&\quad - \frac{1}{\lambda}\int_0^t x(u)\, du + \frac{1}{\lambda} e^{\frac{t}{\lambda}} \int_0^t x(u) e^{-\frac{u}{\lambda}}\, du + x(t) \\
&= x(t).
\end{aligned}
$$

Từ đó suy ra (4.6) được thỏa mãn với mọi $x \in C[0;1]$, do đó F

là toán tử giải của A. Vì thế $\lambda \neq 0$ là giá trị chính quy của A. Vậy $\sigma(A) = \{0\}$. □

2. Dễ thấy A là toán tử tuyến tính bị chặn và $\|A\| = 1$. Khi đó mọi giá trị $\lambda : |\lambda| > 1$ đều là giá trị chính quy, do đó

$$\sigma(A) \subset \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| \leq 1\} \tag{4.7}$$

Giả sử λ là một giá trị riêng của A. Khi đó tồn tại

$$x = (x_1, x_2, \ldots) \in l_p, \; x \neq \theta$$

sao cho

$$Ax = \lambda x$$

hay

$$(x_2, x_3, \ldots) = (\lambda x_1, \lambda x_2, \ldots).$$

Từ đây nhận được $x_{n+1} = \lambda x_n, n = 1, 2, \ldots$, suy ra

$$x_n = \lambda^{n-1} x_1, \; n = 1, 2, \ldots.$$

Và do đó $x = x_1(1, \lambda, \lambda^2, \ldots)$. Ta có $x \in l_p, x \neq \theta$ nên suy ra $|\lambda| < 1$.

Ngược lại, nếu $|\lambda| < 1$ thì phương trình $Ax = \lambda x$ sẽ có nghiệm $x \neq \theta$, chẳng hạn $x = (1, \lambda, \lambda^2, \ldots)$. Do đó tập các giá trị riêng của A là

$$\{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| < 1\}. \tag{4.8}$$

Nhưng vì $\sigma(A)$ là tập đóng nên từ (4.8) suy ra

$$\{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| \leq 1\} \subset \sigma(A). \tag{4.9}$$

Từ (4.7) và (4.9) ta suy ra $\sigma(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| \leq 1\}$. □

3. Tương tự như bài trên ta cũng có A là toán tử tuyến tính liên tục và $\|A\| = 1$. Do đó

$$\sigma(A) \subset \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| \leq 1\}. \tag{4.10}$$

Lấy một số λ cố định tùy ý thỏa mãn $|\lambda| < 1$ và xét phương trình

$$Ax - \lambda x = y,\ y \in l_p.$$

Chọn $y = (1, \lambda, \lambda^2, \dots) \in l_p$, ta sẽ chứng minh phương trình đã cho không có nghiệm trong l_p.

Giả sử ngược lại, $x = (x_1, x_2, \dots) \in l_p$ là một nghiệm của phương trình đã cho. Thế thì ta có

$$(0, x_1, x_2, \dots) - (\lambda x_1, \lambda x_2, \dots) = (1, \lambda, \lambda^2, \dots),$$

suy ra

$$-\lambda x_1 = 1, x_n - \lambda x_{n+1} = \lambda^n\ (n = 1, 2, \dots).$$

Bằng phương pháp quy nạp ta chứng minh được

$$x_n = -\frac{1 - \lambda^{2n}}{\lambda^n(1 - \lambda^2)},\ n = 1, 2, \dots$$

Từ đó, với $n = 1, 2, \dots$

$$|x_n| = \left| -\frac{1 - \lambda^{2n}}{\lambda^n(1 - \lambda^2)} \right| = \frac{|1 - \lambda^{2n}|}{|\lambda|^n|1 - \lambda^2|} \geq \frac{1 - |\lambda|^{2n}}{|\lambda|^n|1 - \lambda^2|},$$

suy ra $\lim\limits_{n\to\infty} |x_n| = +\infty$, mâu thuẫn với $x \in l_p$. Lập luận trên đây chứng tỏ λ không phải là giá trị chính quy của A, tức nó là giá trị phổ của A. Từ đó và từ tính đóng của $\sigma(A)$, ta suy ra

$$\{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| \leq 1\} \subset \sigma(A). \tag{4.11}$$

Từ (4.10) và (4.11) ta nhận được

$$\sigma(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| \leq 1\}. \square$$

4. Xét phương trình $Ax - \lambda x = y$, hay

$$\int_0^t x(s)\, ds - \lambda x(t) = y(t). \tag{4.12}$$

Với $\lambda = 0$, phương trình (4.12) không có nghiệm nếu y khả tích trên đoạn $[0;1]$ nhưng không liên tục trên đoạn đó. Suy ra $0 \in \sigma(A)$.

Với $\lambda \neq 0$ cố định tùy ý, ta đặt

$$(Fx)(t) = -\left[\frac{1}{\lambda^2}e^{\frac{t}{\lambda}}\int_0^t x(u)e^{-\frac{u}{\lambda}}\,du + \frac{1}{\lambda}x(t)\right],$$

trong đó $t \in [0;1], x \in L_2[0;1]$.

Ta có F là toán tử tuyến tính bị chặn tác dụng trong không gian $L_2[0;1]$. Bây giờ ta sẽ chứng minh F chính là toán tử giải của A (ứng với λ), tức là chứng minh

$$[F(A-\lambda I)](x) = [(A-\lambda I)F](x) = x,\ \forall x \in L_2[0;1]. \tag{4.13}$$

Do tập hợp các hàm số liên tục trên đoạn $[0;1]$ trù mật khắp nơi trong không gian $L_2[0;1]$ nên ta chỉ cần chứng minh (4.12) thỏa mãn với mọi hàm x liên tục trên $[0;1]$. Theo bài 1 ta có điều này đúng. Từ đó suy ra (4.13) được thỏa mãn với mọi $x \in L_2[0;1]$, nên F là toán tử giải của A. Vì thế $\lambda \neq 0$ là giá trị chính quy của A. Vậy $\sigma(A) = \{0\}$. □

5. Kí hiệu toán tử chiếu của H lên H_0 là P. Khi đó với mỗi $x \in H$, tồn tại duy nhất

$$u \in H_0, v \in H \ominus H_0 : x = u + v$$

và ta có $Px = u$. Xét phương trình

$$Px - \lambda x = y,\ y \in H. \tag{4.14}$$

Với $\lambda = 0$, (4.14) trở thành $Px = y$. Phương trình này không có nghiệm khi $y \notin H_0$. Do đó $0 \in \sigma(P)$.

Với $\lambda = 1$, (4.14) trở thành $Px - x = y$. Vì $Px - x \in H \ominus H_0$, $\forall x \in H$ nên phương trình này không có nghiệm khi $y \notin H \ominus H_0$. Do đó $1 \in \sigma(P)$. Dễ kiểm tra rằng 0 và 1 cũng chính là những giá trị riêng của P.

Với $\lambda \neq 0, \lambda \neq 1$ và $y \in H$ tùy ý, khi đó ta có biểu diễn duy nhất

$$y = u_0 + v_0,\ u_0 \in H_0, v_0 \in H \ominus H_0.$$

Giả sử (4.14) có nghiệm x và ta có

$$x = u + v,\ u \in H_0, v \in H \ominus H_0.$$

Thay vào (4.14) ta được

$$u - \lambda(u + v) = u_0 + v_0 \Rightarrow (1 - \lambda)u - \lambda v = u_0 + v_0$$

$$\Rightarrow u = \frac{u_0}{1-\lambda},\ v = \frac{v_0}{\lambda}$$

Thử lại ta thấy rằng $x = \dfrac{u_0}{1-\lambda} + \dfrac{v_0}{\lambda}$ thỏa mãn (4.14) và đó cũng là nghiệm duy nhất của phương trình này. Do đó $P - \lambda I$ có ánh xạ ngược F xác định như sau $F(x) = \dfrac{u}{1-\lambda} + \dfrac{v}{\lambda},\ \forall x \in H,$

trong đó $x = u + v,\ u \in H, v \in H \ominus H_0$.

Dễ thấy F là một toán tử tuyến tính, ta sẽ chứng minh nó bị chặn. Thật vậy

$$\begin{aligned}
\|F(x)\| &= \left\|\frac{u}{1-\lambda} + \frac{v}{\lambda}\right\| \\
&\le \left\|\frac{u}{1-\lambda}\right\| + \left\|\frac{v}{\lambda}\right\| \\
&= \frac{\|u\|}{|1-\lambda|} + \frac{\|v\|}{|\lambda|} \\
&\le \sqrt{\frac{1}{(1-\lambda)^2} + \frac{1}{\lambda^2}} \cdot \sqrt{\|u\|^2 + \|v\|^2} \\
&= \sqrt{\frac{1}{(1-\lambda)^2} + \frac{1}{\lambda^2}} \cdot \|x\|
\end{aligned}$$

do đó F bị chặn.

Từ đây suy ra mọi λ khác 0 và khác 1 đều là giá trị chính quy của P. Vậy $\sigma(P) = \{0; 1\}$ và phổ của P cũng là tập tất cả các giá trị riêng của P. $\square$

6. Bạn đọc tự giải.