BÀI TẬP TOÁN KỸ THUẬT

Ngành CNTT, Điện-Điện tử

1 Ma trận

Bài 1.1. Chéo hóa trực giao các ma trận sau

a) $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$.

b) $A = \begin{bmatrix} 6 & -2 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$.

c) $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$.

d) $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

Bài 1.2. Phân tích giá trị kỳ dị các ma trận sau

a) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$.

b) $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$.

c) $A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$.

d) $A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

e) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$.

2 Tối ưu lồi

1. Khảo sát tính lồi (lõm) của hàm số $f : C \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ xác định bởi

a) $f(x) = e^{ax},\ C = \mathbb{R}$.

b) $f(x) = -\log(x),\ C = (0, \infty)$.

c) $f(x) = x^a, a \geq 0, a \leq 1,\ C = (0, \infty)$.

d) $f(x) = -x^a, 0 \leq a \leq 1,\ C = (0, \infty)$.

e) $f(x) = x \log(x),\ C = (0, \infty)$.

2. Khảo sát tính lồi (lõm) của hàm số $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ xác định bởi

   a) $f(x_1, x_2) = (x_1 - 3x_2)^2$.

   b) $f(x_1, x_2) = (x_1 - 3x_2)^2 + (x_1 - 2x_2)^2$.

   c) $f(x_1, x_2) = (x_1 - 3x_2)^2 + (x_1 - 2x_2)^2 + x_1^3$.

3. Khảo sát tính lồi (lõm) của hàm số $f : C \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ xác định bởi

   a) $f(x_1, x_2) = x_1 x_2$, với $C = (0, \infty) \times (0, \infty)$.

   b) $f(x_1, x_2) = \frac{1}{x_1 x_2}$, với $C = (0, \infty) \times (0, \infty)$.

   c) $f(x_1, x_2) = \frac{x_1^2}{x_2}$, với $C = \mathbb{R} \times (0, \infty)$.

   d) $f(x_1, x_2) = x_1^{\alpha} x_2^{1-\alpha}$, vói $C = (0, \infty) \times (0, \infty), 0 \leq \alpha \leq 1$.

4. Khảo sát tính lồi (lõm) và tìm cực trị toàn cục, nếu có, của hàm $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ xác định bởi

   a) $f(x_1, x_2) = \frac{1}{2}x_1^2 + x_2^2 + x_1 - 2x_2 + 5$.

   b) $f(x_1, x_2) = \frac{3}{4}x_1^2 + \frac{3}{4}x_2^2 - \frac{1}{2}x_1 x_2 - 2x_1 + x_2 + 3$.

5. Khảo sát tính lồi (lõm) và tìm cực trị toàn cục, nếu có, của hàm $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, xác định bởi $f(x) = x^T A x + q^T x + 1$, với $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$, và

   a) $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}, q = (1, 2, -1)$.

   b) $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}, q = (1, 0, 1)$.

6. Xét hàm lỗi (loss function) của mô hình hồi quy tuyến tính $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ xác định bởi

   $$f(x) = \frac{1}{2}\|Ax - y\|^2,$$

   biết A là ma trận cỡ $m \times n$, $y \in \mathbb{R}^m$. Chứng minh rằng

   (a) f là hàm lồi;

   (b) f là hàm khả vi và $\nabla f(x) = A^T(Ax - y)$

   (c) Nêu phương pháp lặp gradient đối với hàm lỗi này.

7. Xét hàm lỗi (loss function) của mô hình hồi quy logistic $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ xác định bởi

$$f(\theta) = -\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\big[x_i \ln\theta + (1-x_i)\ln(1-\theta)\big],$$

trong đó $x_i = 1$ hoặc $x_i = 0$. Chứng minh rằng

(a) f là hàm lồi;

(b) f là hàm khả vi và tính $\nabla f(\theta)$

(c) Nêu phương pháp lặp gradient đối với hàm lỗi này.

3 Phương pháp bình phương nhỏ nhất

1. Trong bài báo "Residual Stresses and Adhesion of Thermal Spray Coatings"(Surface Engineering, 2005: 35-40) tác giả nghiên cứu mối quan hệ giữa độ dày $x(\text{ mm})$ của lớp phủ NiCrAl lắng đọng trên nền thép không gỉ và độ bền liên kết y tương ứng (MPa) với dữ liệu như sau:

Độ dày	220	370	440	680	860
Độ bền	24.0	26.3	25.2	17.0	12.2

Giả sử x và y thỏa mô hình $y = \beta_0 + \beta_1 x + \beta_2 x^2$. Hãy sử dụng phương pháp bình phương nhỏ nhất ước lượng các tham số β_0, β_1 và β_2.

2. Giả sử rằng tám mẫu thử của một loại hợp kim nhất định được sản xuất ở các nhiệt độ khác nhau, và độ bền của mỗi mẫu vật sau đó được quan sát. Các giá trị quan sát được cho trong bảng

x_i	0.5	1.0	1.5	2.0	2.5	3.0	3.5	4.0
y_i	40	41	43	42	44	42	43	42

Trong đó x_i là nhiệt độ của mẫu thứ i và y_i là độ bền tương ưng. Hãy sử dụng phương pháp bình phương nhỏ nhất tìm các tham số chưa biết nếu x và y thỏa
a) $y = \beta_0 + \beta_1 x$
b) $y = \beta_0 + \beta_1 x + \beta_2 x^2$

3. Giả sử rằng mỗi người trong số 10 bệnh nhân được điều trị với cùng một lượng của hai loại thuốc khác nhau có thể ảnh hưởng đến huyết áp. Cụ thể, mỗi bệnh nhân đầu tiên được điều trị bằng loại thuốc tiêu chuẩn A, và sự thay đổi huyết áp x_1 của họ được đo. Sau khi tác dụng của thuốc hết tác dụng, bệnh nhân được điều trị bằng một lượng thuốc B mới tương đương, và sự thay đổi huyết áp y của họ được đo lại. Những thay đổi về huyết áp này sẽ được gọi là phản ứng của người bệnh với từng loại thuốc. Hơn nữa ta cũng đo nhịp tim x_2 của các bệnh nhân. Ta có bảng dữ liệu như sau:

x_1	1.9	0.8	1.1	0.1	-0.1	4.4
x_2	66	62	64	61	63	70
y	0.7	-1.0	-0.2	-1.2	-0.1	3.4

Giả sử x_1, x_2 và y thỏa mô hình $y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2$. Hãy sử dụng phương pháp bình phương nhỏ nhất ước lượng các tham số β_0, β_1 và β_2.

4. Với dữ liệu nhận được cho (x_1, x_2, y),

x_1	x_2	y
2.04	3.55	3.11
2.04	6.07	3.26
3.06	3.55	3.89
3.06	6.97	10.25
4.08	3.55	3.11
4.08	6.16	13.48
2.06	3.62	3.94
2.06	6.16	3.53

dùng phương pháp bình phương nhỏ nhất ước lượng các tham số β_k trong mô hình
a) $y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \beta_3 x_1 x_2$.
b) $y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \beta_3 x_1^2 + \beta_4 x_2^2 + \beta_5 x_1 x_2$.

4 Phương pháp hợp lý cực đại

1. Cho X là biến ngẫu nhiên có phân phối chuẩn với trung bình μ chưa biết và phương sai σ^2 đã biết. Từ bộ dữ liệu nhận được của $X, x_1, x_2, \cdots, x_n$, ước lượng tham số μ bằng phương pháp MLE.

2. Cho X là biến ngẫu nhiên có phân phối Weibull như sau

$$f(x;\alpha,\beta) = \begin{cases} \frac{\alpha}{\beta^\alpha} x^{\alpha-1} e^{-(x/\beta)^\alpha}, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$$

Từ bộ dữ liệu nhận được của $X, x_1, x_2, \cdots, x_n$, ước lượng tham số α, β bằng phương pháp MLE và nhận xét dạng ẩn của nghiệm.

3. Cho X là biến ngẫu nhiên có phân phối mũ với tham số λ chưa biết. Từ bộ dữ liệu nhận được của $X, x_1, x_2, \cdots, x_n$, ước lượng tham số λ bằng phương pháp MLE.

4. Độ bền cắt của mỗi mối hàn trong số mười mối hàn thử nghiệm được quan trắc và thu được dữ liệu sau (psi): 392; 376; $401; 367; 389; 362; 409; 415; 358; 375$. Giả sử độ bền có phân phối chuẩn. Hãy xây dựng ước lượng MLE cho trung bình và phương sai cho độ bền mối hàn.

5. Gọi X là tỷ lệ thời gian một sinh viên được chọn ngẫu nhiên phân bổ để làm bài kiểm tra năng khiếu nhất định. Giả sử X có hàm mật độ xác suất như sau

$$f(x;\theta) = \begin{cases} (\theta+1)x^{\theta}, & x \in [0,1] \\ 0, & x \notin [0,1] \end{cases}$$

với $\theta > -1$. Một mẫu $10\,\mathrm{sinh}$ viên được khảo sát với thời gian nhu sau: $x_1 = 0.92; x_2 = 0.79; x_3 = 0.90; x_4 = 0.65$; $x_5 = 0.86; x_6 = 0.47; x_7 = 0.73; x_8 = 0.97; x_9 = 0.94$; và $x_{10} = 0.77$.

Sử dụng dữ liệu trên ước lượng tham số θ bằng phương pháp MLE.

6. Giả sử X là một biến ngẫu nhiên có hàm mật độ

$$f(x;\lambda,\theta) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda(x-\theta)}, & x \geq \theta \\ 0, & x < \theta \end{cases}$$

Với một mẫu 10 giá trị quan sát sau: $3.11, 0.64, 2.55, 2.20$, $5.44, 3.42, 10.39, 8.93, 17.82$ và 1.30 , hãy ước lượng hai tham số λ, θ bằng phương pháp MLE.

7. Giả sử X là biến ngẫu nhiên có hàm mật độ

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}(1+\theta x), & x \in [-1,1] \\ 0, & x \notin [-1,1]. \end{cases}$$

Hãy ước lượng tham số θ bằng phương pháp MLE từ các dữ liệu của X nhận được $x_1, x_1, \cdots, x_n$.

8. Giả sử X là biến ngẫu nhiên có hàm mật độ $f(x) = \frac{1}{2\theta^3}x^2e^{-x/\theta}, \theta, x > 0$. Hãy ước lượng tham số θ bằng phương pháp MLE từ các dữ liệu của X nhận được $x_1, x_1, \cdots, x_n$.

9. Giả sử X là biến ngẫu nhiên có hàm mật độ $f(x) = \theta x^{\theta-1}$, $\theta > 0, 0 < x < 1$. Hãy ước lượng tham số θ bằng phương pháp MLE từ các dữ liệu của X nhận được $x_1, x_1, \cdots, x_n$.

10. Giả sử X là biến ngẫu nhiên có hàm mật độ $f(x) = \frac{1}{\theta}x^{\frac{1-\theta}{\theta}}$, $\theta > 0, 0 < x < 1$. Hãy ước lượng tham số θ bằng phương pháp MLE từ các dữ liệu của X nhận được $x_1, x_1, \cdots, x_n$.