

# BÀI TẬP GIẢI TÍCH (KINH TẾ)

Năm học 2021 - 2022

## Chương 1. Phép tính vi phân và tích phân hàm một biến

### Bài 1. Tính giới hạn

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + 2x + 5} - x)$
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 - 5x - 1} - \sqrt{x^2 + 3x + 3})$
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{\cos x} - \sqrt[3]{\cos x}}{\sin^2 x}$
- $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{2^x - x^2}{x - 2}$
- $\lim_{x \rightarrow 1} (1 + \sin \pi x)^{\cot \pi x}$
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \left( \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x+1} \right)$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x + \sqrt{x}}}{\sqrt{x+1}}$
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{4 \arctan(1+x) - \pi}{x}$
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+2x^2} - \cos x}{x^2}$
- $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{3x^2 + 1}{3x^2 + 5} \right)^{2x^2 + x}$
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{5} - \sqrt{4 + \cos x}}{x^2}$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{2 \arctan x}{\pi} \right)^x$
- $\lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt[x]{\cos \sqrt{x}}$
- $\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{\sin x}{x} \right)^{1/x^2}$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \left( \frac{\pi}{4} - \arctan \frac{x}{x+1} \right)$
- $\lim_{x \rightarrow 0} (2 - \cos x)^{\frac{1}{\sin^2 x}}$
- $\lim_{x \rightarrow 0^+} (\sin x)^{\tan 2x}$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} x(\pi - 2 \arctan x)$
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{\sqrt{1+2x} - e^x}$
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^3} - 1 + x^2}{x \tan x}$
- $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^2 \ln x$
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{\sqrt[5]{1+5x} - (1+x)}$
- $\lim_{x \rightarrow 1} (1-x) \tan \frac{\pi x}{2}$
- $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{2x-1}{2x+3} \right)^x$
- $\lim_{x \rightarrow 0^+} (\sin x)^{2x}$
- $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{2x^2+1}{2x^2-5} \right)^{x^2}$
- $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x+2}{x+1} \right)^{3x}$
- $\lim_{x \rightarrow 0} (1 - 2x^2)^{\cot^2 x}$
- $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{3x+1}{3x+2} \right)^{4x}$

### Bài 2. Xét tính liên tục

$$1. f(x) = \begin{cases} \sin x \ln x & \text{với } x > 0 \\ a + x & \text{với } x \leq 0 \end{cases}$$

$$2. f(x) = \begin{cases} \frac{2x}{e^{2x} - e^{-x}} & \text{với } x \neq 0 \\ a & \text{với } x = 0 \end{cases}$$

$$3. f(x) = \begin{cases} \arctan \frac{1}{|x|} & \text{với } x \neq 0 \\ a & \text{với } x = 0 \end{cases}$$

$$4. f(x) = \begin{cases} (x^2 - 1) \sin \frac{\pi}{x-1} & \text{nếu } x \neq 1 \\ a & \text{nếu } x = 1 \end{cases}$$

$$5. f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt[3]{1+2x} - 1}{x} & \text{nếu } x > 0 \\ a + x^2 & \text{nếu } x \leq 0 \end{cases}$$

$$6. f(x) = \begin{cases} \frac{\ln(1+x) - x}{2x^2} & \text{nếu } x > 0 \\ a & \text{nếu } x \leq 0 \end{cases}$$

$$7. f(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x} & \text{nếu } x \neq 0 \\ a & \text{nếu } x = 0 \end{cases}$$

$$8. f(x) = \begin{cases} x \ln x & \text{với } x > 0 \\ a & \text{với } x \leq 0 \end{cases}$$

$$9. f(x) = \begin{cases} \frac{1 - \cos \sqrt{x}}{x} & \text{nếu } x > 0 \\ a & \text{nếu } x \leq 0 \end{cases}$$

$$10. f(x) = \begin{cases} \frac{1 - e^{\sin x}}{x - \pi} & \text{nếu } x > \pi \\ a + x^2 & \text{nếu } x \leq \pi \end{cases}$$

### Bài 3. Tích phân bất định

$$1. \int \frac{x + x^3}{1 + x^2 - x^4} dx$$

$$2. \int \frac{x^6}{x^2 + x - 2} dx$$

$$3. \int \frac{x^2 + 1}{(x+1)^2(x-1)} dx$$

$$4. \int \frac{x^3 + 1}{x^3 - 5x^2 + 6x} dx$$

$$5. \int \frac{2x}{x^4 + 3x^2 + 2} dx$$

$$6. \int \frac{x}{x^8 - 1} dx$$

$$7. \int \frac{x}{x^3 - 1} dx$$

$$8. \int \frac{x dx}{x^3 - 3x + 2}$$

$$9. \int \frac{x^4}{x^4 + 5x^2 + 4} dx$$

$$10. \int \frac{(x+1) dx}{\sqrt{x^2 + x + 1}}$$

$$11. \int \frac{(2x-1) dx}{\sqrt{x^2 + 3x + 3}}$$

$$12. \int \frac{x dx}{\sqrt{x^2 + 2x - 5}}$$

$$13. \int \frac{x \cdot \arctan x}{\sqrt{1+x^2}} dx$$

$$14. \int \frac{x \ln(1 + \sqrt{1+x^2})}{\sqrt{1+x^2}} dx$$

$$15. \int \frac{dx}{x\sqrt{1-x^3}}$$

$$16. \int \frac{dx}{e^{2x} + e^x - 2}$$

$$17. \int \frac{\arctan e^x}{e^x} dx$$

$$18. \int \frac{dx}{(1+e^x)^2}$$

$$19. \int \frac{x e^{\arctan x}}{(1+x^2)^{3/2}} dx$$

$$20. \int \sin^4 x \cos^5 x dx$$

$$21. \int \frac{\sin x \cos x dx}{\sqrt{a^2 \sin^2 x + b^2 \cos^2 x}}$$

$$22. \int \frac{\sin^4 x}{\cos^6 x} dx$$

$$23. \int \sin^2 x \cos^4 x dx$$

$$24. \int \frac{\sin x}{\sin^3 x + \cos^3 x} dx$$

$$25. \int \frac{dx}{5 - 4 \sin x + 3 \cos x}$$

$$26. \int \frac{dx}{\sqrt{x} - \sqrt[3]{x}}$$

$$27. \int \frac{\sin x - \sin^3 x}{\cos 2x} dx$$

$$28. \int \frac{dx}{(\sin^2 x + 2 \cos^2 x)^2}$$

$$29. \int \frac{dx}{x \cdot \sqrt[3]{1+x}}$$

$$30. \int \frac{dx}{\sin^4 x + \cos^4 x}$$

$$31. \int \frac{dx}{\sin^2 x \cdot \cos x}$$

$$32. \int \frac{dx}{\sin x \cdot \cos^3 x}$$

## Bài 4. Tích phân xác định

$$1. \int_0^{\ln 2} \frac{1}{\sqrt{1+e^x}} dx$$

$$2. \int_0^1 \sqrt{(1-x^2)^3} dx$$

$$3. \int_0^a \frac{dx}{x + \sqrt{a^2 - x^2}}$$

$$4. \int_0^3 \frac{dx}{(3+x^2)^{\frac{5}{2}}}$$

$$5. \int_0^3 \frac{x}{\sqrt{1+x} + \sqrt{5x+1}} \cdot dx$$

$$6. \int_{\sqrt{2}}^2 \frac{dx}{x^5 \sqrt{x^2-1}}$$

$$7. \int_0^1 \frac{\sqrt{e^x}}{\sqrt{e^x + e^{-x}}} dx$$

$$8. \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x \cos x}{a^2 \cos^2 x + b^2 \sin^2 x} dx$$

$$9. \int_{\pi}^{5\pi/4} \frac{\sin 2x}{\sin^4 x + \cos^4 x} \cdot dx$$

$$10. \int_0^{\pi/2} \sin x \cdot \sin 2x \cdot \sin 3x \cdot dx$$

$$11. \int_0^{\pi/2} \frac{\cos x dx}{2 + \cos x}$$

$$12. \int_1^3 \arcsin \sqrt{\frac{x}{x+1}} dx$$

## Chương 2. Hàm nhiều biến

### Bài 1. Tính đạo hàm riêng

$$1. \text{ Cho } z = \sqrt[3]{xy}, \text{ tính } z'_x(0,0), z'_y(0,0).$$

$$2. z = \ln \frac{1}{x + \sqrt{x^2 + y^2}}$$

$$3. z = \ln \tan \frac{x}{y}$$

4.  $z = \arctan \frac{x+y}{x-y}$
5.  $f(x, y) = e^{2x+y^3} + \sqrt{x^3 + y^2} + \sin(4x^2 + 5y)$ .
6.  $f(x, y) = \arctan \frac{x+y}{1-xy}$ .
7.  $f(x, y, z) = \arctan \frac{y}{xz}$
8.  $f(x, y, z) = x^2 + 3y^2z + xz^3 + e^{xyz}$
9.  $u = x^{y^2z}$
10. Cho  $z = \ln(u^2 + v^2)$ ,  $u = xy$ ,  $v = e^{x+y}$ . Tính  $\frac{\partial z}{\partial x}$ ,  $\frac{\partial z}{\partial y}$ .
11. Cho  $z = \ln(3x + 2y - 1)$ ,  $x = e^t$ ,  $y = \sin t$ . Tính  $\frac{\partial z}{\partial x}$ ,  $\frac{\partial z}{\partial y}$ ,  $\frac{dz}{dt}$ .
12. Cho  $u = \sin x + f(\sin y - \sin x)$ ,  $f$  là hàm khả vi. Chứng minh rằng:

$$\frac{\partial u}{\partial y} \cos x + \frac{\partial u}{\partial x} \cos y = \cos x \cos y.$$

13. Cho  $z = f(xy + y^2)$ ,  $f$  là hàm khả vi. Rút gọn biểu thức  $A = (x + 2y) \frac{\partial z}{\partial x} - y \frac{\partial z}{\partial y}$ .
14. Cho  $u = f\left(\frac{y}{x}, \frac{x}{z}\right)$ ,  $f$  là hàm khả vi. Rút gọn biểu thức  $B = x \frac{\partial u}{\partial x} + y \frac{\partial u}{\partial y} + z \frac{\partial u}{\partial z}$ .

## Bài 2. Đạo hàm của hàm ẩn

- Tính  $y'(x)$  biết  $y = y(x)$  hàm ẩn xác định hệ thức:  $1 + xy - \ln(e^{xy} + e^{-xy}) = 0$ .
- Tính  $y'(x)$ ,  $y''(x)$  biết  $y = y(x)$  là hàm ẩn xác định bởi phương trình

$$\ln \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \arctan \frac{y}{x}$$

- Tính  $y'(x)$  của hàm ẩn xác định bởi phương trình  $xe^y + ye^x = 1$  và từ đó tính  $y'(0)$ .
- Tính  $z'_x, z'_y$  và  $dz$  biết  $z = z(x, y)$  là hàm ẩn xác định bởi

(a)  $xy^2z^3 + x^3y^2z = x + y + z$ .

(e)  $x^3 + y^3 + z^3 = 3xyz$

(b)  $\arctan z + z^2 = e^{xy}$

(f)  $2x + 3y + z = e^{xyz}$ .

(c)  $z - ye^{x/z} = 0$

(d)  $\frac{x}{z} = \ln \frac{z}{y} + 1$

(g)  $xyz = \cos(x + y + z)$

5. Tính  $y'(x), z'(x)$  biết  $y = y(x), z = z(x)$  xác định bởi  $\begin{cases} x + 2y + 3z = 1 \\ x^2 + y^2 + z^3 = 4 \end{cases}$

6. Tính  $u'_x, u'_y$  biết  $u = x^2 + y^2 + xyz$  và  $z = z(x, y)$  xác định bởi  $ze^z = ye^x + xe^y$ .

### Bài 3. Đạo hàm và vi phân cấp cao

1. Cho hàm số  $u(x, y, z) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$ . Hãy rút gọn biểu thức

$$A = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}.$$

2. Cho  $u = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ . Chứng minh rằng:  $u''_{x^2} + u''_{y^2} + u''_{z^2} = \frac{2}{u}$ .

3. Tính  $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \left( \frac{1}{2}, 1 \right)$  biết  $u(x, y) = x + (y - 1) \arcsin \left( \sqrt{\frac{x}{y}} \right)$

4. Tính  $z''_{xy}$  biết hàm ẩn  $z = z(x, y)$  xác định bởi  $3x + 2y + z = e^{-x-y-z}$ .

5. Tính các đạo hàm riêng cấp 1, cấp 2 của hàm số  $f(x, y) = x \cos(3x + y^2) + e^{2x+3y}$ .

6. Tính  $d^2 f(1, 1)$ , biết:  $f(x, y) = x^2 + xy + y^2 - 4 \ln x - 2 \ln y$ .

7. Tính  $d^2 f(0, 1)$ , biết:  $f(x, y) = \arctan \frac{x}{y}$ .

8. Tính các đạo hàm riêng cấp 1, cấp 2 và vi phân toàn phần của hàm số  $f(x, y) = \ln \left( \sqrt{x^2 + y^2} \right) + 3 \arctan \frac{x}{y}$  tại điểm  $(1, 2)$ .

9. Tìm  $d^2 z$  biết:

(a)  $z = x^2 \ln(x + y)$

(b)  $z = \arctan \frac{y}{x}$

### Bài 4. Dùng vi phân tính gần đúng

1.  $A = \sqrt{1,98^4 + 3,03^2}$

3.  $C = \arctan \frac{1 + 0,02^3}{0,99^2}$

2.  $B = \ln(\sqrt{1,03} + \sqrt[3]{0,99} - 1)$

4.  $D = \sqrt{(1,04)^{1,99} + \ln(1,02)}$

### Bài 5. Cực trị của hàm nhiều biến

1. Tìm cực trị các hàm sau:

(a)  $f(x, y) = x^2 + xy + y^2 - 2x - 3y$       (c)  $f(x, y) = xy + 1000 \left( \frac{1}{x} + \frac{1}{y} \right)$

(b)  $f(x, y) = x^3 + y^3 - 15xy$ .

(d)  $f(x, y) = 2x^4 + y^4 - x^2 - 2y^2$       (g)  $f(x, y) = x^2 + 4y^2 - 2\ln(xy)$ .  
 (e)  $f(x, y) = xy + \frac{8}{x} + \frac{1}{y}$       (h)  $f(x, y) = x^3 + 3xy^2 - 15x - 12y$ .  
 (f)  $f(x, y) = y\sqrt{x} - 2y^2 - x + 7y + 5$ . (i)  $f(x, y) = (x - y)(1 - xy)$ .

2. Tìm cực trị có điều kiện:

(a)  $f(x, y) = x + 2y$  với điều kiện  $x^2 + y^2 = 5$   
 (b)  $f(x, y) = x^2 + y^2$  với điều kiện  $\frac{x}{2} + \frac{y}{3} = 1$   
 (c)  $f(x, y) = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$  với điều kiện  $\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} = 1$   
 (d)  $f(x, y) = xy$  với điều kiện  $\frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{2} = 1$

3. Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất

(a)  $f(x, y) = x^2 + 3y^2 + x - y$ , trên miền đóng  $D$  giới hạn bởi các đường  $x = 1$ ,  $y = 1$ ,  $x + y = 1$ .  
 (b)  $f(x, y) = xy$  trên miền  $D = \left\{ \frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{2} \leq 1 \right\}$   
 (c)  $z = 1 + xy - x - y$ , trên miền đóng  $D$  giới hạn bởi  $y = x^2$  và  $y = 1$

## Chương 3. Phương trình vi phân

### A. Phương trình vi phân cấp 1

**Bài 1.** Giải các phương trình tách biến

(1)  $x\sqrt{1 - y^2}dx + y\sqrt{1 - x^2}dy = 0$       (3)  $y' = (x + y + 1)^2$   
 (2)  $y' = x^2 + xy + \frac{y^2}{4} - 1$       (4)  $y' = \cos(x - y - 1)$

**Bài 2 .** Giải các phương trình đẳng cấp

(1)  $y' = e^{-\frac{y}{x}} + \frac{y}{x}$       (4)  $y' = \frac{y}{x} + \cos \frac{y}{x}$   
 (2)  $xy' - y + x \cos \frac{y}{x} = 0$       (5)  $y' = \frac{3x^2 - xy - y^2}{x^2}$   
 (3)  $xy' - y = (x + y) \ln \frac{x + y}{x}$       (6)  $y' = \frac{x^2 - xy + y^2}{xy}$

**Bài 3.** Giải các phương trình vi phân tuyến tính cấp 1

(1)  $y' - \frac{2}{x+1}y = (x+1)^3$       (2)  $y' + y = \frac{1}{e^x(1-x)}, y(2) = 1$ .  
 (3)  $y' + 2xy = xe^{-x^2}$

$$(4) (x^2 + y)dx = xdy$$

$$(6) y' \cos y + \sin y = x$$

$$(5) (y + \ln x)dx - xdy = 0$$

#### Bài 4. Giải các phương trình Becnoulli

$$(1) y' - 2xy = 3x^3y^2$$

$$(4) xy' + y = y^2 \ln x; y(1) = 1$$

$$(2) 2y' - \frac{x}{y} = \frac{xy}{x^2 - 1}$$

$$(5) ydx - (x^2y^2 + x)dy = 0$$

$$(3) y' + 2y = y^2e^x$$

$$(6) xy' - 2x\sqrt{y} \cos x = -2y$$

#### Bài 5. Giải các phương trình vi phân toàn phần

$$(1) (x + y)dx + (x - y)dy = 0; y(0) = 0.$$

$$(3) \frac{2x}{y^3}dx + \frac{y^2 - 3x^2}{y^4}dy = 0$$

$$(2) (1 + e^{\frac{x}{y}})dx + e^{\frac{x}{y}} \left(1 - \frac{x}{y}\right)dy = 0$$

$$(4) (1 + y^2 \sin 2x)dx - 2y \cos^2 x dy = 0$$

## B. Phương trình vi phân cấp 2

#### Bài 6. Giải các phương trình vi phân tuyến tính cấp 2 với hệ số hằng

$$(1) y'' - 2y' + y = 2e^{2x}.$$

$$(8) y'' + 2y' + 2y = e^x \sin x.$$

$$(2) y'' - 6y' + 9y = \cos 3x.$$

$$(9) y'' + 9y = \cos 3x + e^x$$

$$(3) 2y'' + 3y' + y = xe^{-x}$$

$$(10) y'' + y = 4xe^x$$

$$(4) y'' + 2y' + 2y = x^2 - 4x + 3$$

$$(11) y'' + y = 6 \sin x$$

$$(5) y'' - 4y' = 4x^2 + 3x + 2; y(0) = 0, y'(0) = 2$$

$$(12) y'' - 2y' + y = xe^x$$

$$(6) y'' + 4y' + 4y = 3e^{-2x}, y(2) = y'(2) = 0$$

$$(13) y'' - 4y' = x^2 + 2x + 3$$

$$(7) 4y'' - 4y' + y = xe^{\frac{1}{2}x}$$

$$(14) y'' - 2y' = 2 \cos^2 x$$

## Chương 4. Phương trình sai phân

#### Bài 1. Phương trình sai phân tuyến tính hệ số hằng

$$1. 5y_{n+2} + 6y_{n+1} - 11y_n = 2n - 1$$

$$7. y_{n+2} - 3y_{n+1} + 2y_n = n + 5$$

$$2. 5y_{n+2} - 6y_{n+1} + 5y_n = 3^n$$

$$8. y_{n+2} = 5y_{n+1} - 6y_n + n^2$$

$$3. 5y_{n+2} - 6y_{n+1} + 5y_n = n^2 + 1$$

$$9. y_{n+2} = 4y_{n+1} - 5y_n + 3n^2$$

$$4. y_{n+2} + y_n = 2^n$$

$$10. y_{n+2} = 3y_{n+1} - 4y_n + 3n^2 + 2$$

$$5. y_{n+2} + 5y_n = 5n^2 - 2n - 1$$

$$11. y_{n+2} + y_n = n + 1$$

$$6. y_{n+2} - 3y_{n+1} + 2y_n = 2^{-2n}$$

$$12. y_{n+2} + y_n = 3, y_0 = 0, y_1 = 1$$

$$13. \begin{cases} y_{n+2} - 4y_{n+1} + 4y_n = 2n + 1, \\ y_0 = 0, y_1 = 1 \end{cases}$$

$$15. y_{n+2} + y_n = 2^n, y_0 = 0, y_1 = 1$$

$$16. x_{n+2} - 8x_{n+1} + 16x_n = 6(n+1)4^{n+2}$$

$$14. y_{n+2} - y_n = 0, y_0 = 0, y_1 = 1$$

$$17. x_{n+2} + x_{n+1} - 6x_n = -4 + 2^n$$

## Bài 2. Hệ phương trình sai phân tuyến tính cấp 1

$$1. \begin{cases} x_{n+1} = 3x_n + y_n \\ y_{n+1} = 2x_n + 2y_n \end{cases}, x_0 = 2, y_0 = -1$$

$$2. \begin{cases} x_{n+1} = 2x_n - 8y_n \\ y_{n+1} = 2x_n - 6y_n \end{cases}, x_0 = -1, y_0 = 2$$

$$3. \begin{cases} x_{n+1} = 3x_n - y_n \\ y_{n+1} = x_n + y_n \end{cases}, x_0 = -1, y_0 = -5$$

$$4. \begin{cases} x_{n+1} = 2x_n - 3y_n \\ y_{n+1} = 3x_n - 4y_n \end{cases}, x_0 = -1, y_0 = 1$$

$$5. \begin{cases} x_{n+1} = x_n + y_n \\ y_{n+1} = -x_n + y_n \end{cases}, x_0 = 0, y_0 = 1$$

$$6. \begin{cases} x_{n+1} = 4x_n - 6y_n \\ y_{n+1} = x_n - y_n \end{cases}$$