Chương 1: HÀM NHIỀU BIẾN

1. Đạo hàm riêng

Cho hàm số $u = f(x, y)$ xác định trong lân cận U của điểm $M_0(x_0, y_0)$. Nếu hàm số một biến $x \mapsto g(x) = f(x, y_0)$ có đạo hàm tại x_0 thì đạo hàm đó được gọi là *đạo hàm riêng theo biến x của hàm hai biến $f(x, y)$ tại điểm $M_0(x_0, y_0)$* và kí hiệu là $f'_x(M_0) = f'_x(x_0, y_0)$ hoặc $\dfrac{\partial f}{\partial x}(M_0) = \dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$. Như vậy

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,\, y_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x,\, y_0) - f(x_0, y_0)}{\Delta x}$$

hoặc

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,\, y_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x, y_0) - f(x_0, y_0)}{x - x_0}.$$

Tương tự, *đạo hàm riêng theo biến y của hàm hai biến $f(x, y)$ tại điểm $M_0(x_0, y_0)$*

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,\, y_0) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x_0,\, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)}{\Delta y}.$$

Bằng cách tương tự trên ta cũng có các định nghĩa đạo hàm riêng của hàm có số đối số nhiều hơn hai.

Chú ý 1.1. *Từ định nghĩa trên ta thấy rằng để tính đạo hàm riêng theo một biến nào đó ta coi các biến khác là hằng số và tính như đạo hàm một biến thông thường.*

Ví dụ 1.1. *(1) $f(x, y) = 2x$. Ta có $f'_x(x, y) = 2$, $f'_y(x, y) = 0$ với mọi $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.*
(2) $f(x, y) = \arctan \dfrac{y}{x}$, xác định trên $U = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x \neq 0\}$. Ta có

$$f'_x(x, y) = \frac{1}{1 + \left(\dfrac{y}{x}\right)^2} . \left(\frac{y}{x}\right)'_x = \frac{-\dfrac{y}{x^2}}{1 + \left(\dfrac{y}{x}\right)^2} = -\frac{y}{x^2 + y^2},$$

$$f'_y(x, y) = \frac{1}{1 + \left(\dfrac{y}{x}\right)^2} . \left(\frac{y}{x}\right)'_y = \frac{\dfrac{1}{x}}{1 + \left(\dfrac{y}{x}\right)^2} = \frac{x}{x^2 + y^2}.$$

(3) $f(x, y) = e^{x^2 y^2}$. Tính $f'_x(1, 1)$, $f'_y(1, 1)$.

$$f'_x(x, y) = 2xy^2 e^{x^2 y^2} \Longrightarrow f'_x(0, 1) = 2e,\ f'_y(x, y) = 2x^2 y e^{x^2 y^2} \Longrightarrow f'_y(0, 1) = 2e.$$

(4) $f(x, y, z) = x^2 + 2yz$ xác định trên $\mathbb{R}^3$. Ta có $f'_x(x, y, z) = 2x$, $f'_y(x, y) = 2z$, $f'_z(x, y) = 2y$ với mọi $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.
(5) Cho $z = yf(x^2 - y^2)$, trong đó f là hàm khả vi một biến. Chứng minh rằng với mọi $x \neq 0$ và $y \neq 0$ ta có:

$$\frac{1}{x} . \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{1}{y} . \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{z}{y^2}.$$

Thật vậy, đặt $u = x^2 - y^2$, ta có

$$\frac{\partial z}{\partial x} = yf'(u).u'_x = 2xyf'(u),$$
$$\frac{\partial z}{\partial y} = f(u) + yf'(u).u'_y = f(u) - 2y^2 f'(u).$$

Từ đó

$$\frac{1}{x} . \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{1}{y} . \frac{\partial z}{\partial y} = 2yf'(u) + \frac{1}{y} . f(u) - 2yf'(u) = \frac{z}{y^2}.$$

(6) Cho $u = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$. *Tính* u'_x, u'_y, u'_z. *Ta viết lại* $u = (x^2+y^2+z^2)^{-1/2}$. *Từ đó*

$$\begin{aligned} u'_x &= -x(x^2+y^2+z^2)^{-3/2}, \\ u'_y &= -y(x^2+y^2+z^2)^{-3/2}, \\ u'_z &= -z(x^2+y^2+z^2)^{-3/2}. \end{aligned}$$

2. Vi phân toàn phần

Định nghĩa 2.1. *Cho hàm số* $z = f(x,y)$ *xác định trong lân cận* U *của điểm* (x_0,y_0). *Hàm* $f(x,y)$ *được gọi là khả vi tại* (x_0,y_0) *nếu số gia toàn phần của hàm số tại* (x_0,y_0) *có thể được biểu diễn dưới dạng:*

$$\Delta f(x_0,y_0) = A.\Delta x + B.\Delta y + \alpha.\Delta x + \beta.\Delta y \tag{2.1}$$

trong đó A, B *là các hằng số (không phụ thuộc vào* $\Delta x, \Delta y$*) và* $\alpha \to 0, \beta \to 0$ *khi* $\Delta x \to 0, \Delta y \to 0$. *Biểu thức* $A.\Delta x + B.\Delta y$ *được gọi là vi phân toàn phần của hàm số tại* (x_0,y_0) *và được kí hiệu là* $df(x_0,y_0)$. *Như vậy:*

$$df(x_0,y_0) = A.\Delta x + B.\Delta y \tag{2.2}$$

Hàm số $u = f(x,y)$ *được gọi là khả vi trên* U *nếu nó khả vi tại mọi điểm của* U.

Định lý 2.1. (điều kiện cần) *Nếu* $f(x,y)$ *khả vi tại* (x_0,y_0) *thì hàm số có các đạo hàm riêng cấp 1 tại đó và* $A = f'_x(x_0,y_0), B = f'_y(x_0,y_0)$ *trong biểu thức (2.1) của* $\Delta f(x_0,y_0)$.

Công thức (2.2) trở thành:

$$df(x_0,y_0) = f'_x(x_0,y_0)\Delta x + f'_y(x_0,y_0)\Delta y \tag{2.3}$$

Ví dụ sau chứng tỏ chiều ngược lại của Định lý 2.1. không đúng.

Ví dụ 2.1. *Chứng minh rằng hàm số* $z = f(x,y) = \sqrt[3]{xy}$ *có các đạo hàm riêng tại* $(0,0)$ *nhưng không khả vi tại đó.*

Giải. Ta có

$$f'_x(0,0) = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(\Delta x,0)-f(0,0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{0-0}{\Delta x} = 0.$$

Tương tự $f'_y(0,0) = 0$. Giả sử hàm số khả vi tại $(0,0)$. Khi đó, theo Định lý 2.1., số gia toàn phần của f tại $(0,0)$

$$\Delta f(0,0) = 0.\Delta x + 0.\Delta y + o(\rho), \quad \rho = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$$

là VCB cấp cao của ρ. Mặt khác, tính trực tiếp ta có

$$\Delta f(0,0) = f(\Delta x, \Delta y) - f(0,0) = \sqrt[3]{\Delta x \Delta y}.$$

Do đó ta suy ra: $\sqrt[3]{\Delta x\Delta y} = o(\rho)$. Xét tỉ số

$$\frac{\Delta f(0,0)}{\rho} = \frac{\sqrt[3]{\Delta x\Delta y}}{\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}}.$$

Lấy $\Delta x = \Delta y \to 0$ thì ta có

$$\frac{\Delta f(0,0)}{\rho} = \frac{\Delta x^{\frac{2}{3}}}{\sqrt{2}|\Delta x|} \to \infty,$$

tức là $\Delta f(0,0)$ không phải là VCB cấp cao hơn ρ, ta gặp mâu thuẫn. Chứng tỏ hàm số không khả vi tại $(0,0)$.

Định lý 2.2. (điều kiện cần) *Nếu $f(x, y)$ khả vi tại (x_0, y_0) thì nó liên tục tại đó.*

Nhận xét 2.1. *Điều ngược lại của Định lý 2.2. không chắc đúng. Chẳng hạn hàm $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ liên tục tại mọi điểm của $\mathbb{R}^2$ nhưng $f(x, 0) = |x|$ không có đạo hàm tại 0, tức là hàm $f(x, y)$ không có $f'_x(0, 0)$. Tương tự, $f(x, y)$ không có $f'_y(0, 0)$. Vậy $f(x, y)$ không khả vi tại điểm $(0, 0)$.*

Từ Định lý 2.1. và Ví dụ 2.1. ta thấy rằng sự tồn tại các đạo hàm riêng chỉ là điều kiện cần của hàm khả vi chứ không phải là điều kiện đủ, tính chất này khác hẳn hàm một biến số.

Định lý 2.3. (điều kiện đủ) *Nếu hàm số $z = f(x, y)$ xác định trong lân cận của (x_0, y_0) và có các đạo hàm riêng $f'_x(x, y), f'_y(x, y)$ liên tục tại (x_0, y_0) thì $f(x, y)$ khả vi tại (x_0, y_0).*

Xét trường hợp đặc biệt $f(x, y) = x$. Khi đó $df(x, y) = dx = \Delta x$. Tương tự $dy = \Delta y$. Vậy vi phân toàn phần của hàm số $f(x, y)$ tại (x_0, y_0) có thể viết dưới dạng:

$$df(x_0, y_0) = f'_x(x_0, y_0)dx + f'_y(x_0, y_0)dy.$$

Tổng quát ta có

$$df(x, y) = f'_x(x, y)dx + f'_y(x, y)dy.$$

Ví dụ 2.2. *Tính vi phân của các hàm:*
(1) $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$.
(2) $f(x, y, z) = e^{x^2+y^2+z^2}$ tại $M_0(0, 1, 2)$.

Giải. (1) Ta tính các đạo hàm riêng

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}},\ \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

Do đó $df = \dfrac{\partial f}{\partial x}dx + \dfrac{\partial f}{\partial y}dy = \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}dx + \dfrac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}dy.$
(2) Ta có

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x} &= 2xe^{x^2+y^2+z^2} \Longrightarrow \frac{\partial f}{\partial x}(M_0) = 0;\\
\frac{\partial f}{\partial y} &= 2ye^{x^2+y^2+z^2} \Longrightarrow \frac{\partial f}{\partial x}(M_0) = 2e^5;\\
\frac{\partial f}{\partial z} &= 2ze^{x^2+y^2+z^2} \Longrightarrow \frac{\partial f}{\partial x}(M_0) = 4e^5.
\end{aligned}$$

Từ đó

$$df(M_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(M_0)dx + \frac{\partial f}{\partial y}(M_0)dy + \frac{\partial f}{\partial z}(M_0)dz = 2e^5dy + 4e^5dz.$$

Ứng của vi phân toàn phần để tính gần đúng: Cho hàm số $f(x, y)$ khả vi tại (x_0, y_0), tức là ta có $\Delta f(x_0, y_0) = df(x_0, y_0) + \alpha\Delta x + \beta\Delta y$. Vì rằng $\alpha\Delta x + \beta\Delta y = o(\rho)$ khi $\rho = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2} \to 0$. Vậy với $|\Delta x|, |\Delta y|$ khá bé ta sẽ nhận được:

$$\begin{aligned}
&\Delta f(x_0, y_0) \approx df(x_0, y_0)\\
\Leftrightarrow\ & f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) \approx f(x_0, y_0) + f'_x(x_0, y_0)\Delta x + f'_y(x_0, y_0)\Delta y. \qquad (2.4)
\end{aligned}$$

Công thức (2.4) thường được sử dụng để tính gần đúng giá trị của hàm số trong lân cận khá bé của (x_0, y_0). Tương tự đối với hàm ba biến ta cũng có

$$f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y, z_0 + \Delta z) \approx f(M_0) + f'_x(M_0)\Delta x + f'_y(M_0)\Delta y + f'_z(M_0)\Delta z,$$

với $M_0 = (x_0, y_0, z_0)$ và $|\Delta x|, |\Delta y|, |\Delta z|$ khá bé.

Ví dụ 2.3. *Ứng dụng vi phân toàn phần để tính gần đúng các đại lượng sau đây:*
(1) $A = (1.04)^{2.03}$.
(2) $B = \sqrt{(1.04)^{1.99} + \ln(1.02)}$.

Giải. (1) $A = (1 + 0.04)^{2+0.03}$. Xét hàm $f(x, y) = x^y$. Chọn $(x_0, y_0) = (1, 2)$ và $\Delta x = 0.04$, $\Delta y = 0.03$. Khi đó

$$A = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) \approx f(x_0, y_0) + f'_x(x_0, y_0)\Delta x + f'_y(x_0, y_0)\Delta y.$$

Tiếp theo ta tính $f(x_0, y_0) = 1^2 = 1$, $\dfrac{\partial f}{\partial x} = yx^{y-1} \Longrightarrow \dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = 2$ và $\dfrac{\partial f}{\partial y} = x^y \ln x \Longrightarrow \dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = 1.\ln 1 = 0$. Vậy

$$A \approx 1 + 2.(0.04) + 0.(0.03) = 1.08.$$

(2) $B = \sqrt{(1 + 0.04)^{2-0.01} + \ln(1 + 0.02)}$. Xét hàm $f(x, y, z) = \sqrt{x^y + \ln z}$. Chọn $M_0 = (x_0, y_0, z_0) = (1, 2, 1)$ và $\Delta x = 0.04$, $\Delta y = -0.01$, $\Delta y = 0.02$. Khi đó

$$B = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) \approx f(M_0) + f'_x(M_0)\Delta x + f'_y(M_0)\Delta y + f'_z(M_0)\Delta z.$$

Bây giờ ta tính giá trị của hàm và giá trị các đạo hàm riêng tại điểm M_0. Ta có $f(M_0) = \sqrt{1^2 + \ln 1} = 1$ và

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x} &= \frac{yx^{y-1}}{2\sqrt{x^y + \ln z}} \Longrightarrow \frac{\partial f}{\partial x}(M_0) = \frac{2.1}{2\sqrt{1 + \ln 1}} = 1,\\
\frac{\partial f}{\partial y} &= \frac{x^y \ln x}{2\sqrt{x^y + \ln z}} \Longrightarrow \frac{\partial f}{\partial y}(M_0) = 0,\\
\frac{\partial f}{\partial z} &= \frac{1}{2z\sqrt{x^y + \ln z}} \Longrightarrow \frac{\partial f}{\partial z}(M_0) = \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

Từ đó suy ra

$$B \approx 1 + 1.(0.04) + 0.(-0.01) + \frac{1}{2}.(0.02) = 1.05.$$

3. Đạo hàm riêng của hàm hợp

Giả sử $z = f(x, y)$ và x, y lại là hàm của s và t. Khi đó để tính đạo hàm riêng của hàm hợp $z(s, t) = f(x(s, t), y(s, t))$ ta cũng có *Quy tắc Xích* tương tự như hàm một biến như sau.

Định lý 3.1. *Cho* $z = f(x, y)$ *với* $x = x(s, t), y = y(s, t)$*. Giả sử:*
(1) Các biến trung gian $x(s, t), y(s, t)$ *có đạo hàm riêng cấp 1 tại* (s_0, t_0)*,*
(2) $f(x, y)$ *khả vi tại điểm* $(x_0, y_0) = (x(s_0, t_0), y(s_0, t_0))$*.*
Khi đó hàm hợp $z = z(s, t)$ *có đạo hàm riêng cấp 1 tại* (s_0, t_0) *và được tính bởi công thức:*

$$\begin{aligned}
\frac{\partial z}{\partial s} &= \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s},\\
\frac{\partial z}{\partial t} &= \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t}.
\end{aligned} \tag{3.5}$$

Nhận xét 3.1. *(1) Trường hợp $z = f(u(x,y))$, ta có*

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{df(u)}{du}.\frac{\partial u}{\partial x}; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{df(u)}{du}.\frac{\partial u}{\partial y}.$$

(2) Trường hợp $z = f(x,y)$, $x = x(t)$, $y = y(t)$, ta có

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x}.\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}.\frac{dy}{dt}.$$

(3) Trường hợp $z = f(x,y)$, $x = t$, $y = y(t) \Longrightarrow z = f(x, y(x))$, ta có

$$\frac{dz}{dx} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}.\frac{dy}{dx}.$$

(4) Trường hợp $z = f(u(x,y), v(x,y), w(x,y))$, ta có:

$$\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial x} &= \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial x},\\ \frac{\partial z}{\partial y} &= \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial y}.\end{aligned}$$

Ví dụ 3.1. *(1) Cho $z = x^3 e^y$, trong đó $x = st$, $y = s^2 - t^2$. Tính $\frac{\partial z}{\partial t}$, $\frac{\partial z}{\partial s}$. Ta có*

$$\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial t} &= \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t}\\ &= 3x^2e^y.s + x^3e^y(-2t) = e^{s^2-t^2}s^3t^2(3-2t^2).\\ \frac{\partial z}{\partial s} &= \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s}\\ &= 3x^2e^yt + x^3e^y.2s = e^{s^2-t^2}s^2t^3(3+2s^2).\end{aligned}$$

(2) Cho $z = u\ln v$, trong đó $u = 3x - y$, $v = x^2 + y^2$. Tính $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$ tại $(x,y) \neq (0,0)$. Theo công thức (3.5) ta có

$$\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial x} &= \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x},\\ &= 3\ln v + \frac{u}{v}.2x = 3\ln(x^2+y^2) + \frac{2x(3x-y)}{x^2+y^2},\\ \frac{\partial z}{\partial y} &= \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y},\\ &= -\ln u + \frac{u}{v}.2y = -\ln(x^2+y^2) + \frac{2y(3x-y)}{x^2+y^2}.\end{aligned}$$

(3) Cho hàm $z = f(x,y)$ có các đạo hàm riêng và $x = r\cos\varphi, y = r\sin\varphi$, (r,φ) là tọa độ cực của điểm (x,y). Khi đó $z = f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)$ và

$$\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial r} &= \frac{\partial f}{\partial x}.\cos\varphi + \frac{\partial f}{\partial y}.\sin\varphi,\\ \frac{\partial z}{\partial \varphi} &= -\frac{\partial f}{\partial x}.r\sin\varphi + \frac{\partial f}{\partial y}.r\cos\varphi.\end{aligned}$$

(4) Cho $z = f(x,y) = x^3 - xy$, trong đó $x = 1 - t^2$, $y = t^4$. Tính $\frac{dz}{dt}$.
Ta có

$$\begin{aligned}\frac{dz}{dt} &= \frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y}.\frac{dy}{dt},\\ &= (3x^2 - y)(-2t) + (-x)4t^3\\ &= [3(1-t^2)^2 - t^4](-2t) + (t^2-1)4t^3 = 2t(4t^2-3).\end{aligned}$$

(5) Cho $z = \arctan \frac{y}{x}$*, trong đó* $y = \sqrt{1-x}$*. Tính* $\frac{dz}{dx}$ *với* $x \neq 0$ *và* $x < 1$.
Ta có

$$\begin{aligned}\frac{dz}{dx} &= \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y}.\frac{dy}{dx} \\ &= \frac{1}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}.\frac{-y}{x^2} + \frac{1}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}.\frac{1}{x}.\frac{-1}{2\sqrt{1-x}} \\ &= \frac{x-2}{2(x^2-x+1)\sqrt{1-x}}.\end{aligned}$$

(6) Cho $z = \sin x + f(\sin y - \sin x)$*, trong đó* f *là hàm khả vi một biến. Chứng minh rằng*

$$\frac{\partial z}{\partial x}\cos y + \frac{\partial z}{\partial y}\cos x = \cos x \cos y.$$

Đặt $u = \sin y - \sin x$*, ta có* $z = \sin x + f(u)$*. Ta có*

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \cos x + \frac{df}{du}(-\cos x), \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{df}{du}\cos y.$$

Vậy

$$\frac{\partial z}{\partial x}\cos y + \frac{\partial z}{\partial y}\cos x = \cos x \cos y - \frac{df}{du}\cos x \cos y + \frac{df}{du}\cos x \cos y = \cos x \cos y.$$

(7) Cho $z = f(x^2+y^2, 2x+3y)$*,* f *là hàm khả vi bất kỳ. Tính* $dz(1,1)$.

Đặt $u = x^2+y^2$*,* $v = 2x+3y$ *ta có* $z = f(u,v)$*. Theo công thức đạo hàm của hàm hợp*

$$\begin{aligned}z'_x &= f'_u.u'_x + f'_v.v'_x = 2xf'_u + 2f'_v, \\ z'_y &= f'_u.u'_y + f'_v.v'_y = 2yf'_u + 3f'_v.\end{aligned}$$

Tại $(x,y) = (1,1)$ *ta có* $(u(1,1), v(1,1)) = (2,5)$*, do vậy* $z'_x(1,1) = 2f'_u(2,5) + 2f'_v(2,5)$*,* $z'_y(1,1) = 2f'_u(2,5) + 3f'_v(2,5)$*. Cuối cùng*

$$dz(1,1) = z'_x(1,1)dx + z'_y(1,1)dy = (2f'_u(2,5) + 2f'_v(2,5))dx + (2f'_u(2,5) + 3f'_v(2,5))dy.$$

4. Đạo hàm của hàm số ẩn

4.1. Hàm ẩn một biến

Cho phương trình

$$F(x,y) = 0, \tag{4.6}$$

trong đó $F(x,y)$ là một hàm hai biến xác định trên tập mở $D \subset \mathbb{R}^2$. Nếu tồn tại một hàm số $y = y(x)$ xác định trên tập con $I \subset \mathbb{R}$ sao cho $(x, y(x)) \in D$ và $F(x, y(x)) = 0$ với mọi $x \in I$ thì hàm số $y = y(x)$ gọi là một *hàm ẩn* xác định bởi phương trình (4.6).

Một bài toán đặt ra là, cho phương trình $F(x,y) = 0$, với điều kiện nào thì tồn tại hàm ẩn. Định lý sau đây giải quyết bài toán đó.

Định lý 4.1. *Xét phương trình* $F(x,y) = 0$*, trong đó* $F(x,y)$ *là hàm hai biến xác định trên hình tròn mở* $U_\epsilon(M_0) \subset \mathbb{R}^2$*, tâm* $M_0 = (x_0, y_0)$*, bán kính* ϵ*. Giả sử*

(1) F *liên tục trong* $U_\epsilon(M_0)$ *và* $F(x_0, y_0) = 0$*,*

(2) tồn tại các đạo hàm riêng $\dfrac{\partial F}{\partial x}, \dfrac{\partial F}{\partial y}$ *liên tục trong* $U_\epsilon(M_0)$ *và* $\dfrac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0$.

Khi đó tồn tại $\delta > 0$ *sao cho phương trình* $F(x, y) = 0$ *xác định một hàm ẩn* $y = y(x)$ *khả vi liên tục trong khoảng* $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ *và ta có:*

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{F'_x}{F'_y} \tag{4.7}$$

Nhận xét 4.1. *Công thức (4.7) có thể chứng minh đơn giản như sau. Lấy đạo hàm hệ thức* $F(x, y(x)) \equiv 0$ *ta có*

$$0 = \frac{d}{dx}F(x, y(x)) = F'_x + F'_y.y'. \tag{4.8}$$

Từ đó suy ra (4.7). Cũng từ đây ta thấy rằng để tính đạo hàm hàm ẩn, ta có thể vận dụng (4.8) thay cho (4.7), tức là cứ đạo hàm phương trình, coi y *là hàm của* x*, từ đó giải ra được* $y'(x)$.

Ví dụ 4.1. *Cho phương trình* $F(x, y) = 0$*, trong đó* $F(x, y) = 2y - \sin y - 2x$*. Hãy tính đạo hàm của hàm ẩn* $y = y(x)$ *xác định bởi phương trình này tại* $x_0 = 0$.

Khi $x_0 = 0$*, phương trình sẽ là* $2y - \sin y = 0$*. Phương trình của ẩn* y *chỉ có một nghiệm duy nhất* $y_0 = 0$ *vì với* $y \neq 0$ *thì* $|\sin y| < |y| < 2|y|$.

Ta có $F'_y = 2 - \cos y \geq 1$*, dễ thấy các điều kiện của Định lý 4.1. được thỏa mãn, do đó phương trình đã cho xác định một hàm ẩn* $y = y(x)$ *thỏa mãn* $y(0) = 0$ *và*

$$y'(x) = -\frac{F'_x}{F'_y} = \frac{2}{2 - \cos y}$$

với mọi x *ở trong lân cận của* 0*. Hơn nữa* $y'(0) = 2$.

Ví dụ 4.2. *Tính đạo hàm* $y'(x)$ *của hàm ẩn* $y = y(x)$ *xác định bởi phương trình*

$$x^3 + y^3 = 3xy.$$

Giải. *Ta viết lại phương trình dưới dạng* $x^3 + y^3 - 3xy = 0$*. Đặt*

$$F(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy.$$

Khi đó

$$y'(x) = -\frac{F'_x}{F'_y} = -\frac{3x^2 - 3y}{3y^2 - 3x} = -\frac{x^2 - y}{y^2 - x},$$

với $y^2 - x \neq 0$.

Ví dụ 4.3. *Tính đạo hàm* $y'(x), y''(x)$ *của hàm ẩn* $y = y(x)$ *xác định bởi phương trình*

$$\ln\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \arctan\frac{y}{x}.$$

Giải. *Ta viết lại phương trình dưới dạng* $\dfrac{1}{2}\ln(x^2 + y^2) + \arctan\dfrac{y}{x} = 0$*. Đặt*

$$F(x, y) = \frac{1}{2}\ln(x^2 + y^2) + \arctan\frac{y}{x}.$$

Ta có:

$$F'_x = \frac{x}{x^2 + y^2} + \frac{1}{1 + \left(\dfrac{y}{x}\right)^2}\left(-\frac{y}{x^2}\right) = \frac{x - y}{x^2 + y^2},$$

$$F'_y = \frac{y}{x^2+y^2} + \frac{1}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{x+y}{x^2+y^2}.$$

Khi đó

$$y'(x) = -\frac{F'_x}{F'_y} = -\frac{x-y}{x+y} = \frac{y-x}{x+y}$$

và

$$\begin{aligned}
y''(x) = \left(\frac{y-x}{x+y}\right)' &= \frac{(y'-1)(x+y)-(1+y')(y-x)}{(x+y)^2} \\
&= \frac{\left(\frac{y-x}{x+y}-1\right)(x+y) - \left(1+\frac{y-x}{x+y}\right)(y-x)}{(x+y)^2} \\
&= \frac{[y-x-(x+y)](x+y)-[x+y+y-x](y-x)}{(x+y)^3} \\
&= \frac{-2x(x+y)-2y(y-x)}{(x+y)^3} \\
&= \frac{-2x^2-2y^2}{(x+y)^3}.
\end{aligned}$$

4.2. Hàm ẩn hai biến

Tương tự hàm ẩn một biến, ta cũng có khái niệm hàm ẩn nhiều biến số và định lý về sự tồn tại hàm ẩn như sau.

Định lý 4.2. *Xét phương trình $F(x,y,z)=0$, trong đó $F(x,y,z)$ là hàm ba biến xác định trên hình cầu mở $U_\epsilon(M_0) \subset \mathbb{R}^3$, tâm $M_0=(x_0,y_0,z_0)$, bán kính ϵ. Giả sử*

(1) $F(x,y,z)$ liên tục trong $U_\epsilon(M_0)$ và $F(M_0)=0$.

(2) tồn tại các đạo hàm riêng F'_x, F'_y, F'_z liên tục trong $U_\epsilon(M_0)$ và $F'_z(x_0,y_0,z_0) \neq 0$.

Khi đó với $\beta > 0$ bất kỳ đủ nhỏ, tồn tại $\alpha > 0$ sao cho với mỗi (x,y) thuộc lân cận $U_\alpha(x_0,y_0)$, phương trình $F(x,y,z)=0$ có một nghiệm duy nhất $z \in (z_0-\beta, z_0+\beta)$. Hơn nữa, hàm hai biến $z=z(x,y)$ có các đạo hàm riêng liên tục trong $U_\alpha(x_0,y_0)$ và xác định theo công thức:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F'_x}{F'_z}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F'_y}{F'_z} \tag{4.9}$$

Ví dụ 4.4. *Tính z'_x, z'_y, trong đó $z=z(x,y)$ là hàm ẩn xác định bởi phương trình $xyz=\cos(x+y+z)$.*

Giải: Ta viết lại phương trình dưới dạng $xyz-\cos(x+y+z)=0$. Đặt

$$F(x,y,z) = xyz - \cos(x+y+z).$$

Ta có $F'_x = yz+\sin(x+y+z)$, $F'_y = xz+\sin(x+y+z)$, $F'_z = xy+\sin(x+y+z)$. Vậy

$$\begin{aligned}
\frac{\partial z}{\partial x} &= -\frac{F'_x}{F'_z} = -\frac{yz+\sin(x+y+z)}{xy+\sin(x+y+z)}, \\
\frac{\partial z}{\partial y} &= -\frac{F'_y}{F'_z} = -\frac{xz+\sin(x+y+z)}{xy+\sin(x+y+z)}.
\end{aligned}$$

Ví dụ 4.5. *Cho hàm ẩn $z=z(x,y)$ xác định bởi phương trình $z-ye^{x/z}=0$. Hãy tính gần đúng giá trị $z(0.02, 0.99)$.*

Giải. Ta có

$$z(0.02, 0.99) = z(0 + 0.02, 1 - 0.01) \approx z(0,1) + z'_x(0,1).(0.02) + z'_y(0,1).(-0.01).$$

Cho $x = 0, y = 1$ vào phương trình ban đầu, ta được $z(0,1) = 1$. Mặt khác, đặt $F(x,y,z) = z - ye^{x/z}$, ta có

$$F'_x = -\frac{y}{z}e^{x/z},\ \ F'_y = -e^{x/z},\ \ F'_z = 1 + \frac{xy}{z^2}e^{x/z}.$$

Tại $(x,y) = (0,1)$, ta thu được

$$\frac{\partial z}{\partial x}(0,1) = -\frac{F'_x(0,1,1)}{F'_z(0,1,1)} = 1,$$
$$\frac{\partial z}{\partial y}(0,1) = -\frac{F'_y(0,1,1)}{F'_z(0,1,1)} = 1.$$

Cuối cùng ta có

$$z(0.02, 0.99) \approx 1 + 1.(0.02) + 1.(-0.01) = 1.01.$$

4.3. Hệ hàm ẩn

Cho hệ phương trình

$$\begin{cases} F(x,y,u,v) = 0, \\ G(x,y,u,v) = 0. \end{cases} \tag{4.10}$$

Trong trường hợp đặc biệt ta có thể giải từ hệ ra hai ẩn số u, v phụ thuộc vào hai biến còn lại:

$$\begin{cases} u(x,y) = 0, \\ v(x,y) = 0. \end{cases} \tag{4.11}$$

Hệ hàm ẩn (4.11) được gọi là hệ các hàm ẩn xác định từ hệ các phương trình hàm (4.10).

Ví dụ 4.6. *Cho $u(x,y), v(x,y)$ là các hàm ẩn xác định bởi hệ phương trình:*

$$\begin{cases} u + v \ = x \\ u - yv \ = 0 \end{cases}$$

Hãy tính vi phân toàn phần du, dv.

Giải. Đạo hàm từng phương trình của hệ theo x ta có

$$\begin{cases} u'_x + v'_x \ = 1 \\ u'_x - yv'_x \ = 0 \end{cases}$$

Giải hệ ta được $u'_x = \dfrac{y}{1+y}$, $v'_x = \dfrac{1}{1+y}$. Tương tự, đạo hàm từng phương trình của hệ theo y ta có

$$\begin{cases} u'_y + v'_y \ = 0 \\ u'_y - v - yv'_y \ = 0 \end{cases}$$

và giải ra $u'_y = \dfrac{v}{1+y}$, $v'_y = \dfrac{-v}{1+y}$ (với $y \neq -1$). Vậy

$$du = \frac{y}{1+y}dx + \frac{v}{1+y}dy$$

và

$$dv = \frac{1}{1+y}dx - \frac{v}{1+y}dy.$$

Nhận xét 4.2. *Ta có thể giải bài này bằng cách lấy vi phân hệ phương trình đã cho:*

$$\begin{cases} du + dv = dx, \\ du - ydv - vdy = 0. \end{cases}$$

Giải ra được $du = \dfrac{ydx + vdy}{1+y}$, $dv = \dfrac{dx - vdy}{1+y}$.

Ví dụ 4.7. *Tính các đạo hàm riêng* $\dfrac{\partial u}{\partial x}, \dfrac{\partial v}{\partial x}$ *biết hệ phương trình hàm ẩn:*

$$\begin{cases} u^2 + ux - uv + y^2 = 0 \\ uv + v^2 - xy = 0. \end{cases}$$

Giải. Đạo hàm từng phương trình của hệ theo x ta có

$$\begin{cases} 2uu'_x + xu'_x + u - u'_x v - v'_x u = 0, \\ u'_x v + v'_x u + 2vv'_x - y = 0. \end{cases}$$

$$\begin{cases} (2u + x - v)u'_x - uv'_x = -u, \\ vu'_x + (u + 2v)v'_x = y. \end{cases}$$

Theo quy tắc Cramer, ta được:

$$u'_x = \frac{\begin{vmatrix} -u & -u \\ y & u + 2v \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2u + x - v & -u \\ v & u + 2v \end{vmatrix}} = \frac{-(u+2v)u + uy}{(u+2v)(2u+x-v) + uv}.$$

Tương tự, ta tính được v'_x

$$v'_x = \frac{xy + 2yu - yv + uv}{(x + 2u - v)(u + 2v) + uv}.$$

Ví dụ 4.8. *Tính đạo hàm* $y'(x),\ z'(x)$ *của các hàm ẩn* $y = y(x), z = z(x)$ *được xác định bởi hệ phương trình sau:*

$$\begin{cases} x + y + z = 0, \\ x^2 + y^2 + z^2 = 1. \end{cases}$$

Giải. *Đạo hàm hai vế theo* x *ta có*

$$\begin{cases} 1 + y'(x) + z'(x) = 0, \\ 2x + 2yy'(x) + 2zz'(x) = 0. \end{cases} \implies \begin{cases} 1.y'(x) + z'(x) = -1, \\ yy'(x) + zz'(x) = -x. \end{cases}$$

Từ đó, ta tính

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ y & z \end{vmatrix} = z - y,\ D_x = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -x & z \end{vmatrix} = x - z,\ D_y = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ y & -x \end{vmatrix} = y - x.$$

Vậy

$$y'(x) = \frac{D_x}{D} = \frac{x - z}{z - y},\ \ z'(x) = \frac{D_y}{D} = \frac{y - x}{z - y}.$$

5. Đạo hàm riêng cấp cao

Đạo hàm riêng cấp hai: Giả sử $z = f(x, y)$ xác định trong lân cận của (x_0, y_0) và có các đạo hàm riêng f'_x, f'_y tại (x_0, y_0). Khi đó ta có các hàm hai biến $f'_x(x, y)$ và $f'_y(x, y)$. Nếu các hàm này có các đạo hàm riêng tại điểm (x_0, y_0) thì chúng được gọi là *các đạo hàm riêng cấp hai* của hàm $f(x, y)$ tại điểm (x_0, y_0) và ký hiệu như sau:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)(x_0, y_0) \text{ hay } f''_{xx}(x_0, y_0) = (f'_x)'_x(x_0, y_0),$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0, y_0) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)(x_0, y_0) \text{ hay } f''_{yy}(x_0, y_0) = (f'_y)'_y(x_0, y_0),$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)(x_0, y_0) \text{ hay } f''_{xy}(x_0, y_0) = (f'_x)'_y(x_0, y_0),$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x_0, y_0) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)(x_0, y_0) \text{ hay } f''_{yx}(x_0, y_0) = (f'_y)'_x(x_0, y_0).$$

Các đạo hàm riêng cấp $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ và $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ gọi là các đạo hàm riêng hỗn hợp cấp hai của hàm $f(x, y)$. Các đạo hàm này khác nhau về thứ tự lấy đạo hàm riêng theo từng biến x, y và do đó nói chung chúng khác nhau. Hoàn toàn tương tự ta có các đạo hàm riêng cấp 3, 4, ... Chẳng hạn

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right), \quad \frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right), \ldots$$

Bằng cách tương tự trên ta cũng có các định nghĩa đạo hàm riêng cấp cao hơn hai của hàm có số đối số nhiều hơn hai. Ví dụ

$$\frac{\partial^5 u}{\partial x \partial y \partial x^2 \partial z} = \frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial x}.$$

Ví dụ 5.1. *Tính các đạo hàm riêng cấp hai của các hàm*
(1) $z = e^{xy}$.
(2) $z = \arctan \frac{x}{y}$.

Giải. (1) Các đạo hàm riêng cấp một là:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = ye^{xy}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = xe^{xy}.$$

Do đó các đạo hàm riêng cấp hai là:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = y^2 e^{xy}, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = x^2 e^{xy},$$

và

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = e^{xy} + xye^{xy}, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = e^{xy} + xye^{xy}.$$

(2) Ta tính các đạo hàm riêng cấp một là:

$$z'_x = \frac{1}{1 + \left(\frac{x}{y}\right)^2}\left(\frac{x}{y}\right)'_x = \frac{1}{1 + \frac{x^2}{y^2}}.\frac{1}{y} = \frac{y}{x^2 + y^2},$$

$$z'_y = \frac{1}{1 + \left(\frac{x}{y}\right)^2}\left(\frac{x}{y}\right)'_y = \frac{1}{1 + \frac{x^2}{y^2}}.\left(-\frac{x}{y^2}\right) = \frac{-x}{x^2 + y^2}.$$

Do đó các đạo hàm riêng cấp hai là:

$$z''_{xx} = (z'_x)'_x = \left(\frac{y}{x^2+y^2}\right)'_x = -\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2},$$

$$z''_{yy} = (z'_y)'_y = \left(\frac{-x}{x^2+y^2}\right)'_y = \frac{2xy}{(x^2+y^2)^2},$$

$$z''_{xy} = (z'_x)'_y = \left(\frac{y}{x^2+y^2}\right)'_y = \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2},$$

$$z''_{yx} = (z'_y)'_x = \left(\frac{-x}{x^2+y^2}\right)'_x = \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}.$$

Chú ý 5.1. *Trong ví dụ trên ta thấy các đạo hàm hỗn hợp bằng nhau $z''_{xy} = z''_{yx}$. Tuy nhiên, trong trường hợp tổng quát điều đó có thể không đúng.*

Ví dụ 5.2. *Cho hàm số*

$$f(x,y) = \begin{cases} xy\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}, & \text{nếu } (x,y) \neq 0, \\ 0, & \text{nếu } (x,y) = 0. \end{cases}$$

Chứng minh rằng $f''_{xy}(0,0) \neq f''_{yx}(0,0)$.

Giải. Với $(x,y) \neq (0,0)$ ta có

$$f'_x(x,y) = \frac{y(x^4 - y^4 + 4x^2y^2)}{(x^2+y^2)^2}.$$

Tại $(x,y) = (0,0)$ ta có

$$f'_x(0,0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(\Delta x, 0) - f(0,0)}{\Delta x} = 0$$

vì vậy

$$f''_{xy}(0,0) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f'_x(0,\Delta y) - f'_x(0,0)}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{-(\Delta y)^5}{(\Delta y)^5} = -1.$$

Tương tự với $(x,y) \neq (0,0)$ ta có

$$f'_y(x,y) = \frac{x(x^4 - y^4 - 4x^2y^2)}{(x^2+y^2)^2}$$

và $f'_y(0,0) = 0$, do đó

$$f''_{yx}(0,0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f'_y(\Delta x, 0) - f'_y(0,0)}{\Delta x} = 1.$$

Như vậy $f''_{yx}(0,0) = 1 \neq -1 = f''_{xy}(0,0)$.

Định lý 5.1. (Schwarz) *Nếu $f(x,y)$ có các đạo hàm riêng hỗn hợp f''_{xy} và f''_{yx} trong lân cận $U_\epsilon(M_0)$ của điểm $M_0(x_0,y_0)$ và liên tục tại M_0 thì*

$$f''_{xy}(M_0) = f''_{yx}(M_0).$$

6. Vi phân cấp cao

Ta nhận thấy $df(x,y) = f'_x(x,y)dx + f'_y(x,y)dy$ cũng là một hàm số của x và y nên có thể xét vi phân của nó. Nếu $df(x,y)$ khả vi thì vi phân của nó được gọi là vi phân cấp hai của hàm số, được kí hiệu là $d^2f(x,y) = d(df(x,y))$ và nói rằng $f(x,y)$ khả vi đến cấp 2.

Tổng quát vi phân cấp n, nếu có sẽ kí hiệu:

$$d^n f(x,y) = d(d^{n-1}f(x,y)). \tag{6.12}$$

Công thức vi phân cấp 2 trường hợp x, y là biến độc lập. Ta có

$$\begin{aligned} d^2f(x,y) = d(df(x,y)) &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy\right)dx + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy\right)dy \\ &= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}dx^2 + \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} + \frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}\right)dxdy + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}dy^2. \end{aligned}$$

Giả sử các đạo hàm riêng hỗn hợp liên tục, do đó chúng bằng nhau theo Định lý Schwarz. Khi đó:

$$d^2f(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}dx^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}dxdy + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}dy^2. \tag{6.13}$$

Ví dụ 6.1. *(1) Cho hàm số $f(x,y) = x^y$. Tìm d^2f nếu x và y là biến độc lập.*
(2) Tìm d^2u của hàm $u = f(x+y, xy)$ nếu x và y là biến độc lập.

Giải. (1) Từ công thức (6.13) ta có

$$d^2f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}dx^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}dxdy + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}dy^2.$$

Ta có $\frac{\partial f}{\partial x} = yx^{y-1}$, $\frac{\partial f}{\partial y} = x^y \ln x$. Do đó

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = y(y-1)x^{y-2},\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = x^y(\ln x)^2,\ \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} = x^{y-1}(1 + y\ln x).$$

Vậy

$$d^2f = y(y-1)x^{y-2}dx^2 + 2x^{y-1}(1 + y\ln x)dxdy + x^y(\ln x)^2dy^2.$$

(2) Ta viết hàm đã cho dưới dạng $u = f(t,v)$, trong đó $t = x+y,\ v = xy$. Giả sử các điều kiện liên tục cần thiết được thỏa mãn, ta có:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= f'_t + f'_v y,\ \ \frac{\partial u}{\partial y} = f'_t + f'_v x \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= f''_{tt} + f''_{tv}y + f''_{vt}y + f''_{vv}y^2 \\ &= f''_{tt} + 2f''_{tv}y + y^2 f''_{vv}. \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y} &= f''_{tt} + xf''_{tv} + yf''_{vt} + xyf''_{vv} + f'_v \\ &= f''_{tt} + (x+y)f''_{tv} + xyf''_{vv} + f'_v. \\ \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} &= f''_{tt} + f''_{tv}x + f''_{vt}x + f''_{vv}x^2 \\ &= f''_{tt} + 2f''_{tv}x + f''_{vv}x^2. \end{aligned}$$

Vậy

$$\begin{aligned}
d^2u &= \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}dx^2 + 2\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}dxdy + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}dy^2 \\
&= (f''_{tt} + 2f''_{tv}y + y^2 f''_{vv})dx^2 + 2[f''_{tt} + (x+y)f''_{tv} + xyf''_{vv} + f'_v]dxdy \\
&\qquad + (f''_{tt} + 2f''_{tv}x + f''_{vv}x^2)dy^2.
\end{aligned}$$

7. Cực trị của hàm nhiều biến

7.1. Cực trị không điều kiện

Cho hàm $f(x, y)$ xác định trong miền $D \subset \mathbb{R}^2$ và $M_0 = (x_0, y_0)$ là điểm trong của D.

Định nghĩa 7.1. *Điểm M_0 gọi là điểm cực đại địa phương của hàm f (cực tiểu địa phương) nếu tồn tại một lân cận $U_\epsilon(M_0)$ sao cho*

$$f(M) \le f(M_0) \;\; (f(M) \ge f(M_0)) \text{ với mọi } M \in U_\epsilon(M_0) \setminus \{M_0\}.$$

Nếu ta có bất đẳng thức thực sự

$$f(M) < f(M_0) \;\; (f(M) > f(M_0)) \text{ với mọi } M \in U_\epsilon(M_0) \setminus \{M_0\}$$

thì M_0 gọi là điểm cực đại địa phương chặt (cực tiểu địa phương chặt) của hàm f.

Các điểm cực đại và các điểm cực tiểu (bỏ qua từ địa phương cho gọn) gọi chung là các điểm cực trị. Nếu (x_0, y_0) là điểm cực đại thì $f(x_0, y_0)$ gọi là giá trị cực đại. Tương tự đối với giá trị cực tiểu.

Chú ý 7.1. *Từ định nghĩa trên ta suy ra rằng điểm M_0 được gọi là điểm cực trị nếu trong lân cận nào đó của nó, số gia $\Delta f = f(M) - f(M_0)$ không đổi dấu.*

Quy tắc tìm cực trị:

a) Tương tự như Định lý Fermat đối với hàm một biến số, ta có điều kiện cần của cực trị dưới đây.

Định lý 7.1. *Nếu $f(x, y)$ có các đạo hàm riêng tại điểm trong (x_0, y_0) của D và nếu (x_0, y_0) là điểm cực trị của hàm f thì*

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = 0, \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = 0. \end{cases}$$

b) Điểm mà tại đó các đạo hàm riêng bằng không gọi là *điểm dừng* của hàm số. Từ định lý trên ta suy ra rằng nếu điểm trong $M_0 = (x_0, y_0) \in D$ là điểm cực trị của $f(x, y)$ thì M_0 là điểm dừng của $f(x, y)$. Điều ngược lại chưa chắc đúng. Chẳng hạn, xét hàm $f(x, y) = x^2 - y^2$ xác định trên $\mathbb{R}^2$. Ta có

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} = 2x = 0, \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = -2y = 0. \end{cases}$$

Như vậy hàm có điểm dừng $(0, 0)$ nhưng điểm này không là điểm cực trị vì với lân cận $U_\epsilon(0, 0)$ bất kỳ của $(0, 0)$, ta lấy các điểm $(x, 0) \in U_\epsilon(0, 0)$ thì $f(x, 0) = x^2 \ge 0 = f(0, 0)$, còn với các điểm $(0, y) \in U_\epsilon(0, 0)$ thì $f(0, y) = -y^2 \le 0 = f(0, 0)$.

c) Điều kiện đủ của cực trị

Định lý 7.2. *Giả sử hàm số $z = f(x, y)$ có điểm dừng là (x_0, y_0) và hàm này có các đạo hàm riêng cấp hai liên tục trong lân cận V của (x_0, y_0). Ta đặt:*

$$A = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0),\ B = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0),\ C = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0, y_0) \text{ và } \Delta = B^2 - AC.$$

Khi đó

(1) Nếu $\Delta < 0$ và $A > 0$ thì (x_0, y_0) là điểm cực tiểu của $f(x, y)$;

(2) Nếu $\Delta < 0$ và $A < 0$ thì (x_0, y_0) là điểm cực đại của $f(x, y)$;

(2) Nếu $\Delta > 0$ thì (x_0, y_0) không phải là điểm cực trị của $f(x, y)$;

(3) Nếu $\Delta = 0$ thì chưa thể kết luận được gì về sự tồn tại cực trị của hàm $f(x, y)$ tại điểm (x_0, y_0).

Ví dụ 7.1. *Tìm cực trị của hàm số $f(x, y) = x^3 + y^3 + 3xy$.*

Giải. Tìm điểm dừng của hàm $f(x, y)$:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} = 3x^2 + 3y = 0, \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = 3y^2 + 3x = 0. \end{cases}$$

Giải hệ ta được hai điểm dừng $M_1(0, 0)$ và $M_2(-1, -1)$. Tính các đạo hàm riêng cấp hai

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 6x,\quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 3,\quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 6y.$$

• Tại $M_1(0, 0)$ ta có:

$$A = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0, 0) = 0,\quad B = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, 0) = 3,\quad C = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0, 0) = 0.$$

Vậy $B^2 - AC = 9 > 0$, do đó điểm M_1 không phải là điểm cực trị của hàm số đã cho.

• Tại $M_2(-1, -1)$ ta có:

$$A = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(-1, -1) = -6,\quad B = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(-1, -1) = 3,\quad C = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(-1, -1) = -6.$$

Vậy $B^2 - AC = 9 - 36 < 0$ và $A = -6 < 0$, do đó điểm M_2 là điểm cực đại của hàm số đã cho và $f_{CD} = f(-1, -1) = -5$.

Ví dụ 7.2. *Khảo sát cực trị của hàm số: $z = x^2 + y^4$.*

Giải. Tìm điểm dừng của hàm $f(x, y)$:

$$\begin{cases} z_x{}' = 2x = 0, \\ z_y{}' = 4y^3 = 0. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0, \\ y = 0. \end{cases}$$

Điểm $M_0(0, 0)$ là điểm dừng. Tính các đạo hàm riêng cấp 2:

$$z''_{xx} = 2,\quad z''_{xy} = 0,\quad z''_{yy} = 12y^2 \Rightarrow A = 2, B = 0, C = 0$$

và do đó $B^2 - AC = 0$. Trường hợp này ta chưa có kết luận gì mà phải xét thêm như sau: $f(0, 0) = 0$ và $f(x, y) = x^2 + y^4 \geq 0 = f(0, 0)$, do đó $M_0(0, 0)$ là điểm cực tiểu của hàm đã cho.

Ví dụ 7.3. *Khảo sát cực trị của hàm số:* $z = x^4 + y^4 - x^2 - 2xy - y^2$.

Giải. Tìm điểm dừng:

$$\begin{cases} z'_x = 4x^3 - 2x - 2y = 0, \\ z'_y = 4y^3 - 2y - 2x = 0. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^3 = y^3, \\ 2x^3 - x - y = 0. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y, \\ x(x^2 - 1) = 0. \end{cases}$$

Ta được ba điểm dừng $M_1(0,0)$, $M_2(-1,-1)$ và $M_3(1,1)$. Tính các đạo hàm riêng cấp 2:

$$z''_{xx} = 12x^2 - 2, \;\; z''_{xy} = -2, \;\; z''_{yy} = 12y^2 - 2.$$

• Tại $M_2(-1,-1)$ ta có:

$$A = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(-1,-1) = 10, \;\; B = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(-1,-1) = -2, \;\; C = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(-1,-1) = 10.$$

Vậy $B^2 - AC = 4 - 100 < 0$ và $A = 10 > 0$, do đó điểm M_2 là điểm cực tiểu của hàm số đã cho và $f_{CT} = f(-1,-1) = -2$.

• Tại $M_3(1,1)$ ta có:

$$A = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(1,1) = 10, \;\; B = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(1,1) = -2, \;\; C = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(1,1) = 10.$$

Vậy $B^2 - AC = 4 - 100 < 0$ và $A = 10 > 0$, do đó điểm M_3 là điểm cực tiểu của hàm số đã cho và $f_{CT} = f(1,1) = -2$.

• Tại $M_1(0,0)$ ta có:

$$A = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0) = -2, \;\; B = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) = -2, \;\; C = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0,0) = -2.$$

Vậy $B^2 - AC = 4 - 4 = 0$. Trường hợp này chưa có kết luận ngay mà cần phải khảo sát thêm bằng phương pháp khác.

Ta có $f(0,0) = 0$. Với $x = y = \frac{1}{n}$ thì

$$f\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right) = \frac{2}{n^2}\left(\frac{1}{n^2} - 2\right) < 0 \text{ với } n > 1.$$

Mặt khác với $x = \frac{1}{n}, y = -\frac{1}{n}$ thì

$$f\left(\frac{1}{n}, -\frac{1}{n}\right) = \frac{2}{n^4} > 0.$$

Như vậy trong lân cận bất kỳ của $M_1(0,0)$, hàm đổi dấu, chứng tỏ hàm không đạt cực trị tại $(0,0)$.

7.2. Cực trị có điều kiện

Cho hàm hai biến $z = f(x,y)$ xác định trên tập con $D \subset \mathbb{R}^2$ và $A \subset D$. Ta xét trường hợp A là một đường có phương trình $\varphi(x,y) = 0$. Khi đó cực trị của hàm $f(x,y)$ trên A còn được gọi là cực trị của hàm $f(x,y)$ với ràng buộc (điều kiện) $\varphi(x,y) = 0$.

Định nghĩa 7.2. *Ta nói hàm $f(x,y)$ với điều kiện $\varphi(x,y)=0$ đạt cực đại tại điểm $M_0(x_0,y_0)$ nếu tồn tại một lân cận V của M_0 sao cho*

$$f(M) < f(M_0)$$

với mọi $M \in V$, $M \neq M_0$ và thỏa điều kiện ràng buộc $\varphi(M_0)=0$.

Tương tự ta có khái niệm điểm cực tiểu của hàm số với ràng buộc $\varphi(x,y)=0$.

Từ điều kiện ràng buộc $\varphi(x,y)=0$ nếu giải được $y=y(x)$ thì cực trị có điều kiện của hàm hai biến trở thành cực trị của hàm một biến thông thường. Tuy nhiên trong nhiều trường hợp ta không rút ra được $y=y(x)$ từ điều kiện ràng buộc $\varphi(x,y)=0$. Khi đó ta dùng *phương pháp nhân tử Lagrange* sau đây để tìm cực trị có điều kiện.

Định lý 7.3. *Giả sử $f(x,y), \varphi(x,y)$ có các đạo hàm riêng liên tục trong một lân cận V của (x_0,y_0) và các đạo hàm riêng của $\varphi(x,y)$ tại (x_0,y_0) không đồng thời bằng 0. Nếu (x_0,y_0) là điểm cực trị có điều kiện của $f(x,y)$ với ràng buộc $\varphi(x,y)=0$ thì tồn tại số thực λ_0 thỏa mãn hệ phương trình:*

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) + \lambda_0 \dfrac{\partial \varphi}{\partial x}(x_0,y_0) = 0, \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0) + \lambda_0 \dfrac{\partial \varphi}{\partial y}(x_0,y_0) = 0. \end{cases} \tag{7.14}$$

Hàm số $L(x,y,\lambda)=f(x,y)+\lambda\varphi(x,y)$ được gọi là hàm Lagrange và λ được gọi là nhân tử Lagrange.

Điều kiện đủ:

Giả sử $f(x,y)$, $\varphi(x,y)$, $M_0(x_0,y_0)$ thỏa mãn Định lý 7.3. (điểm $M_0(x_0,y_0)$ được gọi là điểm dừng của bài toán cực trị có điều kiện). Ta chuyển bài toán tìm cực trị của hàm $f(x,y)$ với điều kiện $\varphi(x,y)=0$ sang bài toán cực trị không điều kiện của hàm Lagrange

$$L(x,y,\lambda)=f(x,y)+\lambda\varphi(x,y).$$

Định lý 7.4. *Giả thiết thêm rằng các hàm $f(x,y)$, $\varphi(x,y)$ có đạo hàm riêng đến cấp 2 liên tục trong lân cận điểm M_0 và λ_0 là giá trị tương ứng với (x_0,y_0). Xét vi phân cấp 2 của hàm $L(x,y,\lambda)$ tại (x_0,y_0) ứng với λ_0.*

$$d^2L(x_0,y_0,\lambda_0) = L''_{x^2}(x_0,y_0,\lambda_0)dx^2 + 2L''_{xy}(x_0,y_0,\lambda_0)dxdy + L''_{y^2}(x_0,y_0,\lambda_0)dy^2,$$

trong đó dx, dy thỏa mãn ràng buộc:

$$\begin{cases} d\varphi(x_0,y_0) = \varphi'_x(x_0,y_0)dx + \varphi'_y(x_0,y_0)dy = 0, \\ dx^2+dy^2 \neq 0. \end{cases}$$

• *Khi ấy nếu $d^2L(x_0,y_0,\lambda_0) < 0$ thì hàm $f(x,y)$ có cực đại có điều kiện và nếu $d^2L(x_0,y_0,\lambda_0) > 0$ thì hàm $f(x,y)$ có cực tiểu có điều kiện.*

• *Nếu $d^2L(x_0,y_0,\lambda_0)$ không xác định dấu trong miền nói trên thì hàm không đạt cực trị có điều kiện tại (x_0,y_0).*

Ví dụ 7.4. *Tìm cực trị của hàm số $f(x,y)=2x+y$ với điều kiện $x^2+y^2=5$.*

Giải. Từ điều kiện $x^2+y^2=5$ ta suy ra $\varphi(x,y)=x^2+y^2-5$. Lập hàm Lagrange $L(x,y,\lambda)=2x+y+\lambda(x^2+y^2-5)$. Tìm điểm dừng

$$\begin{cases} L'_x(x,y) = 2+2\lambda x = 0 \\ L'_y(x,y) = 1+2\lambda y = 0 \\ \varphi(x,y) = x^2+y^2-5 = 0 \end{cases}$$

Giải ra hai điểm dừng: $M_1(2,1)$ ứng với $\lambda = -\dfrac{1}{2}$ và $M_2(-2,-1)$ ứng với $\lambda = \dfrac{1}{2}$.

Tính các đạo hàm riêng cấp hai

$$L''_{x^2} = 2\lambda,\ L''_{xy} = 0,\ L''_{y^2} = 2\lambda.$$

Do đó vi phân cấp hai:

$$d^2L(x,y) = 2\lambda(dx^2 + dy^2).$$

• Tại điểm $M_1(2,1)$ ứng với $\lambda = -\dfrac{1}{2}$ ta có

$$d^2L(M_1, -\frac{1}{2}) = -(dx^2 + dy^2) < 0.$$

Vậy M_1 là điểm cực đại, $f_{CD} = f(2,1) = 4$.

• Tại điểm $M_2(-2,-1)$ ứng với $\lambda = \dfrac{1}{2}$ ta có

$$d^2L(M_2, \frac{1}{2}) = dx^2 + dy^2 > 0.$$

Vậy M_2 là điểm cực tiểu, $f_{CT} = f(-2,-1) = -4$.

Ví dụ 7.5. *Tìm cực trị của hàm số $f(x,y) = x^2 + y^2$ với điều kiện $x^2 + y^2 = 3x + 4y$.*

Giải. Từ điều kiện $x^2 + y^2 = 3x + 4y$ ta suy ra $\varphi(x,y) = x^2 + y^2 - 3x - 4y$. Lập hàm Lagrange $L(x,y,\lambda) = x^2 + y^2 + \lambda(x^2 + y^2 - 3x - 4y)$. Tìm điểm dừng

$$\begin{cases} L'_x(x,y) = 2x + \lambda(2x-3) = 0 \\ L'_y(x,y) = 2y + \lambda(2y-4) = 0 \\ \varphi(x,y) = x^2 + y^2 - 3x - 4y = 0 \end{cases}$$

Giải ra hai điểm dừng: $M_1(0,0)$ ứng với $\lambda = 0$ và $M_2(3,4)$ ứng với $\lambda = -2$.

Tính các đạo hàm riêng cấp hai

$$L''_{x^2} = 2 + 2\lambda,\ L''_{xy} = 0,\ L''_{y^2} = 2 + 2\lambda.$$

Do đó vi phân cấp hai:

$$d^2L(x,y) = (2 + 2\lambda)(dx^2 + dy^2).$$

• Tại điểm $M_1(0,0)$ ứng với $\lambda = 0$ ta có

$$d^2L(M_1, 0) = 2(dx^2 + dy^2) > 0.$$

Vậy M_1 là điểm cực tiểu, $f_{CT} = f(0,0) = 0$.

• Tại điểm $M_2(3,4)$ ứng với $\lambda = -2$ ta có

$$d^2L(M_2, -2) = -2(dx^2 + dy^2) < 0.$$

Vậy M_2 là điểm cực đại, $f_{CD} = f(3,4) = 25$.

Ví dụ 7.6. *Tìm cực trị của hàm số $f(x,y) = xy$ với điều kiện $\dfrac{x^2}{8} + \dfrac{y^2}{2} = 1$.*

Giải. Từ điều kiện $\dfrac{x^2}{8}+\dfrac{y^2}{2}=1$ ta suy ra $\varphi(x,y)=\dfrac{x^2}{8}+\dfrac{y^2}{2}-1$. Lập hàm Lagrange

$$L(x,y,\lambda)=x^2+y^2+\lambda\left(\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{2}-1\right).$$

Tìm điểm dừng

$$\begin{cases} L'_x(x,y)=y+\dfrac{\lambda x}{4}=0\\ L'_y(x,y)=x+\lambda y=0\\ \varphi(x,y)=\dfrac{x^2}{8}+\dfrac{y^2}{2}-1=0\end{cases}$$

Giải hệ ta được 4 điểm dừng:

- $M_1(2,1)$, $M_2(-2,-1)$ ứng với $\lambda=-2$,
- $M_3(2,-1)$, $M_4(-2,1)$ ứng với $\lambda=2$.

Tính các đạo hàm riêng cấp hai

$$L''_{x^2}=\frac{\lambda}{4},\ L''_{xy}=1,\ L''_{y^2}=\lambda.$$

Do đó vi phân cấp hai:

$$d^2L(x,y)=\frac{\lambda}{4}dx^2+2dxdy+\lambda dy^2.$$

- Tại $M_1(2,1)$, $M_2(-2,-1)$ ứng với $\lambda=-2$, ta có

$$d^2L(M_{1,2};-2)=-\frac{1}{2}dx^2+2dxdy-2dy^2.$$

Mặt khác $d\varphi(x,y)=0\iff\dfrac{xdx}{4}+ydy=0$, do đó tại điểm M_1 hoặc M_2 ta có: $dx=-2dy$. Vậy

$$d^2L(M_{1,2};-2)=-\frac{1}{2}dx^2+2dxdy-2dy^2=-8dy^2<0.$$

Chú ý rằng không thể xảy ra trường hợp $dy=0$, vì nếu $dy=0$ thì $dx=-2dy=0$, điều này vô lý. Vì thế $M_1(2,1)$ và $M_2(-2,-1)$ là hai điểm cực đại, $f_{CD}=f(M_1)=f(M_2)=2$.

- Tại $M_3(2,-1)$, $M_4(-2,1)$ ứng với $\lambda=2$, ta có

$$d^2L(M_{3,4};2)=\frac{1}{2}dx^2+2dxdy+2dy^2.$$

Tương tự trên ta có $d\varphi(M_{3,4})=0\iff dx=2dy$. Vậy

$$d^2L(M_{3,4};2)=\frac{1}{2}dx^2+2dxdy+2dy^2=8dy^2>0.$$

Vì thế $M_3(2,-1)$ và $M_4(-2,1)$ là hai điểm cực tiểu, $f_{CT}=f(M_3)=f(M_4)=-2$.

7.3. Giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm hai biến liên tục trên miền đóng và bị chặn

Bài toán. *Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm liên tục $z=f(x,y)$ trong miền đóng và bị chặn D.*

Theo định lý Weierstrass, giá trị lớn nhất hoặc nhỏ nhất của hàm $f(x,y)$ sẽ đạt được tại một điểm $M_0(x_0,y_0)$ của D. Nếu M_0 là điểm trong của D thì M_0 là điểm cực trị, tức là M_0 là điểm dừng của hàm $f(x,y)$ (để đơn giản ta chỉ xét hàm khả vi). Tuy nhiên hàm $f(x,y)$ có thể đạt các giá trị lớn nhất và nhỏ nhất trên biên của D.

Vì vậy để tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm liên tục $z = f(x, y)$ trong miền đóng và bị chặn D ta thực hiện theo các bước sau:

• Bước 1: Tìm điểm dừng bên trong miền D, tức là những điểm thỏa mãn:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} = 0, \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = 0. \end{cases}$$

Giả sử giải ra điểm dừng $M_1(x_1, y_1)$, nếu $M_1 \in D$ thì ta tính $f(M_1)$.

• Bước 2: Tìm điểm dừng trên biên của D bằng phương pháp nhân tử Lagrange, sau đó tính giá trị của hàm tại các điểm tìm được.

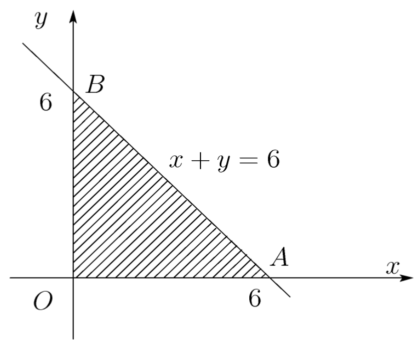
• Bước 3: So sánh tất cả các giá trị tìm được ở trên và rút ra kết luận.

Ví dụ 7.7. *Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số*

$$z = f(x, y) = x^2 y(2 - x - y)$$

trên miền đóng giới hạn bởi các đường $x = 0$, $y = 0$, $x + y = 6$.

Giải.



Hình 1.1

• Trước hết ta tìm điểm dừng bên trong miền D:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} = xy(4 - 3x - 2y) = 0, \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = x^2(2 - x - 2y) = 0. \end{cases}$$

Vì ta chỉ cần tìm các điểm dừng bên trong miền D nên $x > 0$, $y > 0$. Giải hệ ta được $x = 1$, $y = \dfrac{1}{2}$. Điểm $M_1 \in D$, do đó ta tính $f(M_1) = \dfrac{1}{4}$.

• Bây giờ ta đi tìm các điểm dừng trên biên. Biên của D gồm 3 đoạn OA, OB, AB.

- Trên OA và OB: $z = 0$.

- Trên AB: $y = 6 - x$, $0 \le x \le 6$, thế $y = 6 - x$ vào hàm đã cho ta được

$$g(x) = f(x, 6 - x) = -4x^2(6 - x), \quad 0 \le x \le 6.$$

Tính $g'(x) = 12x(x - 4) = 0 \iff x = 0 \vee x = 4$. Như vậy ta thu được 3 điểm nghi ngờ có cực trị trên đoạn biên AB: $M_2(0, 0)$, $M_3(4, 2)$, $M_4(6, 0)$. Ta tính $f(M_2) = 0$, $f(M_3) = -128$, $f(M_4) = 0$.

• Giá trị lớn nhất của hàm là $f(M_1) = \dfrac{1}{4}$ và giá trị nhỏ nhất là $f(M_3) = -128$.

Ví dụ 7.8. *Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số*

$$z = f(x, y) = xy$$

trên miền đóng $D = \left\{\dfrac{x^2}{8} + \dfrac{y^2}{2} \leq 1\right\}$.

Giải. • Trước hết ta tìm điểm dừng bên trong miền D:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} = y = 0, \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = x = 0. \end{cases}$$

Điểm dừng $M_1(0, 0) \in D$, $f(M_1) = 0$.

• Bây giờ ta đi tìm các điểm dừng trên biên. Biên của D là đường elip $\dfrac{x^2}{8} + \dfrac{y^2}{2} = 1$, vì vậy ta dùng phương pháp nhân tử Lagrange để tìm nghi ngờ đạt cực trị trên biên. Tương tự Ví dụ 7.6., ta lập hàm Lagrange

$$L(x, y, \lambda) = x^2 + y^2 + \lambda\left(\frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{2} - 1\right).$$

Tìm điểm dừng

$$\begin{cases} L'_x(x, y) = y + \dfrac{\lambda x}{4} = 0 \\ L'_y(x, y) = x + \lambda y = 0 \\ \varphi(x, y) = \dfrac{x^2}{8} + \dfrac{y^2}{2} - 1 = 0 \end{cases}$$

Giải hệ ta được 4 điểm dừng:

• $M_1(2, 1)$, $M_2(-2, -1)$ ứng với $\lambda = -2$, $f(M_1) = f(M_2) = 2$.

• $M_3(2, -1)$, $M_4(-2, 1)$ ứng với $\lambda = 2$, $f(M_3) = f(M_4) = -2$.

• Giá trị lớn nhất của hàm là $f(M_1) = f(M_2) = 2$ và giá trị nhỏ nhất là $f(M_3) = f(M_4) = -2$.