

# BÀI TẬP GIẢI TÍCH 2

Năm học 2025 - 2026

## CHƯƠNG 1. HÀM NHIỀU BIẾN

### PHẦN TỰ LUẬN

**Bài 1. Tính các đạo hàm riêng của hàm số**

1) Cho  $z = \sqrt[3]{xy}$ , tính  $z'_x(0, 0), z'_y(0, 0)$ .

2)  $z = \ln \frac{1}{x + \sqrt{x^2 + y^2}}$

3)  $z = \ln \tan \frac{x}{y}$

4)  $z = \arctan \frac{x + y}{x - y}$

5)  $f(x, y) = e^{2x+y^3} + \sqrt{x^3 + y^2} + \sin(4x^2 + 5y)$ .

6)  $f(x, y) = \arctan \frac{x + y}{1 - xy}$ .

7)  $f(x, y, z) = \arctan \frac{y}{xz}$

8)  $f(x, y, z) = x^2 + 3y^2z + xz^3 + e^{xyz}$

9)  $u = x^{y^2z}$

10) Cho  $z = \ln(u^2 + v^2)$ ,  $u = xy$ ,  $v = e^{x+y}$ . Tính  $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$ .

11) Cho  $z = \ln(3x + 2y - 1)$ ,  $x = e^t$ ,  $y = \sin t$ . Tính  $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, \frac{dz}{dt}$ .

12) Cho  $u = \sin x + f(\sin y - \sin x)$ ,  $f$  là hàm khả vi. Chứng minh rằng:

$$\frac{\partial u}{\partial y} \cos x + \frac{\partial u}{\partial x} \cos y = \cos x \cos y.$$

13) Cho  $z = f(xy + y^2)$ ,  $f$  là hàm khả vi. Rút gọn biểu thức  $A = (x + 2y) \frac{\partial z}{\partial x} - y \frac{\partial z}{\partial y}$ .

14) Cho  $u = f\left(\frac{y}{x}, \frac{x}{z}\right)$ ,  $f$  là hàm khả vi. Rút gọn biểu thức  $B = x \frac{\partial u}{\partial x} + y \frac{\partial u}{\partial y} + z \frac{\partial u}{\partial z}$ .

**Bài 2. Đạo hàm của hàm ẩn**

1) Tính  $y'(x)$  biết  $y = y(x)$  hàm ẩn xác định hệ thức:  $1 + xy - \ln(e^{xy} + e^{-xy}) = 0$ .

2) Tính  $y'(x), y''(x)$  biết  $y = y(x)$  là hàm ẩn xác định bởi phương trình

$$\ln \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \arctan \frac{y}{x}$$

- 3) Tính  $y'(x)$  của hàm ẩn xác định bởi phương trình  $xe^y + ye^x = 1$  và từ đó tính  $y'(0)$ .
- 4) Tính  $z'_x, z'_y$  và  $dz$  biết  $z = z(x, y)$  là hàm ẩn xác định bởi
- (a)  $xy^2z^3 + x^3y^2z = x + y + z$ . (e)  $x^3 + y^3 + z^3 = 3xyz$
- (b)  $\arctan z + z^2 = e^{xy}$  (f)  $2x + 3y + z = e^{xyz}$ .
- (c)  $z - ye^{x/z} = 0$
- (d)  $\frac{x}{z} = \ln \frac{z}{y} + 1$  (g)  $xyz = \cos(x + y + z)$
- 5) Tính  $y'(x), z'(x)$  biết  $y = y(x), z = z(x)$  xác định bởi  $\begin{cases} x + 2y + 3z = 1 \\ x^2 + y^2 + z^3 = 4 \end{cases}$
- 6) Tính  $u'_x, u'_y$  biết  $u = x^2 + y^2 + xyz$  và  $z = z(x, y)$  xác định bởi  $ze^z = ye^x + xe^y$ .

**Bài 3. Đạo hàm và vi phân cấp cao**

- 1) Cho hàm số  $u(x, y, z) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$ . Hãy rút gọn biểu thức

$$A = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}.$$

- 2) Cho  $u = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ . Chứng minh rằng:  $u''_{x^2} + u''_{y^2} + u''_{z^2} = \frac{2}{u}$ .

- 3) Tính  $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \left( \frac{1}{2}, 1 \right)$  biết  $u(x, y) = x + (y - 1) \arcsin \left( \sqrt{\frac{x}{y}} \right)$

- 4) Tính  $z''_{xy}$  biết hàm ẩn  $z = z(x, y)$  xác định bởi  $3x + 2y + z = e^{-x-y-z}$ .

- 5) Tính các đạo hàm riêng cấp 1, cấp 2 của hàm số  $f(x, y) = x \cos(3x + y^2) + e^{2x+3y}$ .

- 6) Tính  $d^2 f(1, 1)$ , biết:  $f(x, y) = x^2 + xy + y^2 - 4 \ln x - 2 \ln y$ .

- 7) Tính  $d^2 f(0, 1)$ , biết:  $f(x, y) = \arctan \frac{x}{y}$ .

- 8) Tính các đạo hàm riêng cấp 1, cấp 2 và vi phân toàn phần của hàm số  $f(x, y) = \ln \left( \sqrt{x^2 + y^2} \right) + 3 \arctan \frac{x}{y}$  tại điểm  $(1, 2)$ .

- 9) Tìm  $d^2 z$  biết:

(a)  $z = x^2 \ln(x + y)$  (b)  $z = \arctan \frac{y}{x}$

**Bài 4. Cực trị của hàm nhiều biến**

- 1) Tìm cực trị các hàm sau:

BÀI TẬP GIẢI TÍCH 2

- (a)  $f(x, y) = x^2 + xy + y^2 - 2x - 3y$
- (b)  $f(x, y) = x^3 + y^3 - 15xy.$
- (c)  $f(x, y) = xy + 1000\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right)$
- (d)  $f(x, y) = 2x^4 + y^4 - x^2 - 2y^2$
- (e)  $f(x, y) = xy + \frac{8}{x} + \frac{1}{y}$
- (f)  $f(x, y) = y\sqrt{x} - 2y^2 - x + 7y + 5.$
- (g)  $f(x, y) = x^2 + 4y^2 - 2\ln(xy).$
- (h)  $f(x, y) = x^3 + 3xy^2 - 15x - 12y.$
- (i)  $f(x, y) = (x - y)(1 - xy).$

2) Tìm cực trị có điều kiện:

- (a)  $f(x, y) = x + 2y$  với điều kiện  $x^2 + y^2 = 5$
- (b)  $f(x, y) = x^2 + y^2$  với điều kiện  $\frac{x}{2} + \frac{y}{3} = 1$
- (c)  $f(x, y) = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$  với điều kiện  $\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} = 1$
- (d)  $f(x, y) = xy$  với điều kiện  $\frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{2} = 1$

3) Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất

- (a)  $f(x, y) = x^2 + 3y^2 + x - y$ , trên miền đóng  $D$  giới hạn bởi các đường  $x = 1, y = 1, x + y = 1.$
- (b)  $f(x, y) = xy$  trên miền  $D = \left\{ \frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{2} \leq 1 \right\}$
- (c)  $z = 1 + xy - x - y$ , trên miền đóng  $D$  giới hạn bởi  $y = x^2$  và  $y = 1$

## PHẦN TRẮC NGHIỆM

**Câu 1.** Tìm vi phân toàn phần của hàm số  $z = x^2 + 5^y.$

- (A)  $dz = 2xdx + 5^y \ln 5dy.$
- (B)  $dz = 2xdx + 5^y \ln ydy.$
- (C)  $dz = 2xdx + 5^{y-1}dy.$
- (D)  $dz = 2xdx + 5^{y-1} \ln 5dy.$

**Câu 2.** Tìm vi phân toàn phần của hàm số  $z = \ln \sqrt{x - y}.$

- (A)  $dz = \frac{dy - dx}{2(x - y)}.$
- (B)  $dz = \frac{dx - dy}{2(x - y)}.$
- (C)  $dz = \frac{dx - dy}{x - y}.$
- (D)  $dz = \frac{dy - dx}{x - y}.$

**Câu 3.** Tìm vi phân toàn phần của hàm số  $z = \arctan(x - y).$

- (A)  $dz = \frac{dx + dy}{1 + (x - y)^2}.$
- (B)  $dz = \frac{dx - dy}{1 + (x - y)^2}.$
- (C)  $dz = \frac{dy - dx}{1 + (x - y)^2}.$
- (D)  $dz = \frac{-dx - dy}{1 + (x - y)^2}.$

**Câu 4.** Tìm vi phân toàn phần của hàm số  $z = x^2 + 2xy + \sin(x^3y^5).$

- (A)  $dz = [4x + 3x^2 \cos(x^3y^5)] dx + [2x + 5x^3y^4 \cos(x^3y^5)] dy.$
- (B)  $dz = [2x + 2xy + 3x^2 \cos(x^3y^5)] dx + [2x + 5x^3y^4 \cos(x^3y^5)] dy.$
- (C)  $dz = [2x + 2y + 3x^2 \cos(x^3y^5)] dx + [2x + 5y^4 \cos(x^3y^5)] dy.$
- (D)  $dz = [2x + 2y + 3x^2y^5 \cos(x^3y^5)] dx + [2x + 5x^3y^4 \cos(x^3y^5)] dy.$

**Câu 5.** Tìm vi phân cấp hai của hàm số  $z = x^3 + y^2 - 4xy$ .

- (A)  $d^2z = 6xdx^2 - 8dxdy + 2dy^2$ . (B)  $d^2z = 6xdx^2 - 4dxdy + 2dy^2$ .  
 (C)  $d^2z = 6xdx^2 + 8dxdy + 2dy^2$ . (D)  $d^2z = 6xdx^2 + 4dxdy + 2dy^2$ .

**Câu 6.** Tìm vi phân cấp hai của hàm số  $z = y \ln x$ .

- (A)  $d^2z = -\frac{y}{x^2}dx^2 + \frac{2}{x}dxdy + \frac{1}{x}dy^2$ . (B)  $d^2z = -\frac{y}{x^2}dx^2 + \frac{2}{x}dxdy$ .  
 (C)  $d^2z = \frac{y}{x^2}dx^2 + \frac{2}{x}dxdy$ . (D)  $d^2z = -\frac{y}{x^2}dx^2 - \frac{2}{x}dxdy$ .

**Câu 7.** Đạo hàm riêng theo biến  $y$  của hàm số  $f(x, y) = e^x(-x + 3y)$  là

- (A)  $-e^x(-x + 3y)$ . (B)  $3e^x(-x + 3y)$ . (C)  $-e^x$ . (D)  $3e^x$ .

**Câu 8.** Vi phân toàn phần của hàm số  $f(x, y) = x^2 + x \cos y$  tại điểm  $(1; 0)$  là

- (A)  $2dx - dy$ . (B)  $2xdx - x \sin y dy$ . (C)  $2$ . (D)  $3dx$ .

**Câu 9.** Các điểm dừng của hàm số  $f(x, y) = x^3 + 6xy + y^3$  là

- (A)  $M_1(0; 0)$  và  $M_2(-1; 2)$ . (B)  $M_1(0; 0)$  và  $M_2(-2; -2)$ .  
 (C)  $M_1(1; 1)$  và  $M_2(2; 2)$ . (D)  $M_1(1; -1)$  và  $M_2(-1; 2)$ .

**Câu 10.** Đạo hàm riêng theo biến  $z$  của hàm số  $f(x, y, z) = \arctan \frac{y}{xz^2}$  là

- (A)  $\frac{-2xyz}{y^2 + x^2z^4}$ . (B)  $\frac{xy}{z^2 + x^2z^4}$ . (C)  $\frac{2xyz}{x^2 + z^2y^4}$ . (D)  $\frac{-2xy^2}{x^2 + z^2y^4}$ .

**Câu 11.** Cho hàm số  $f(x, y) = \ln \sqrt{x^2 + y^2}$ .

- (A)  $f''_{xx}(1; 2) = \frac{8}{9}$ . (B)  $f''_{xx}(1; 2) = -\frac{5}{6}$ . (C)  $f''_{xx}(1; 2) = \frac{3}{25}$ . (D)  $f''_{xx}(1; 2) = -\frac{4}{5}$ .

**Câu 12.** Cho hàm ẩn hai biến  $z = z(x, y)$  xác định bởi  $z - ye^{\frac{z}{x}} = 0$ . Đạo hàm riêng của  $z(x, y)$  theo biến  $x$  bằng

- (A)  $\frac{xye^{\frac{z}{x}}}{x^2 + xye^{\frac{z}{x}}}$ . (B)  $\frac{e^{\frac{z}{x}}}{x^2 - xye^{\frac{z}{x}}}$ . (C)  $\frac{yze^{\frac{z}{x}}}{xye^{\frac{z}{x}} - x^2}$ . (D)  $\frac{x}{x^2 + xye^{\frac{z}{x}}}$ .

**Câu 13.** Cho hàm số  $f(x, y) = x^3 + 3xy^2 - 30x - 18y$ , ( $x \geq 0, y \geq 0$ ). Điểm cực tiểu  $M(x_0; y_0)$  của hàm số có  $x_0 - y_0$  bằng

- (A)  $-2$ . (B)  $3$ . (C)  $-3$ . (D)  $2$ .

**Câu 14.** Cho hàm số  $f(x, y) = x^6 - y^5 - \cos^2 x - 32y$ . Hãy chọn khẳng định đúng.

- (A) Hàm  $f$  đạt cực đại tại  $(1; 2)$ . (B) Hàm  $f$  đạt cực tiểu tại  $(1; 2)$ .  
 (C) Hàm  $f$  không có điểm dừng. (D) Hàm  $f$  có một cực trị.

**Câu 15.** Cho hàm số  $f(x, y) = xy^2(1 - x - y)$  với  $x > 0, y > 0$ . Hãy chọn khẳng định đúng.

- (A) Hàm  $f$  đạt cực đại tại  $(\frac{1}{4}; \frac{1}{2})$ . (B) Hàm  $f$  đạt cực tiểu tại  $(\frac{1}{4}; \frac{1}{2})$ .  
 (C) Hàm  $f$  có 2 điểm dừng. (D) Hàm  $f$  có 3 điểm dừng.

**Câu 16.** Cho hàm số  $f(x, y) = 2x^2 - 4x + \sin y - \frac{y}{2}$  với  $x \in \mathbb{R}, -\pi < y < \pi$ . Hãy chọn khẳng định đúng.

- (A) Hàm  $f$  đạt cực đại tại  $(1; \frac{\pi}{3})$ . (B) Hàm  $f$  đạt cực tiểu tại  $(1; \frac{\pi}{3})$ .  
 (C) Hàm  $f$  đạt cực tiểu tại  $(1; -\frac{\pi}{3})$ . (D) Hàm  $f$  có 1 cực tiểu và 1 cực đại.

**Câu 17.** Tìm cực trị của hàm số  $f(x, y) = \ln(x^2 - 2y)$  với điều kiện  $x - y - 2 = 0$ . Hãy chọn khẳng định đúng.

- (A) Hàm  $f$  đạt cực đại tại  $(1; -1)$ .
- (B) Hàm  $f$  đạt cực tiểu tại  $(1; -1)$ .
- (C) Hàm  $f$  có 2 cực trị.
- (D) Hàm  $f$  không có cực trị.

**Câu 18.** Tìm cực trị của hàm số  $f(x, y) = \ln |1 + x^2y|$  với điều kiện  $x - y - 3 = 0$ . Hãy chọn khẳng định đúng.

- (A) Hàm  $f$  đạt cực tiểu tại  $(0; -3)$  và cực đại tại  $(2; -1)$ .
- (B) Hàm  $f$  đạt cực đại tại  $(0; -3)$  và tại  $(2; -1)$ .
- (C) Hàm  $f$  đạt cực đại tại  $(0; -3)$  và cực tiểu tại  $(2; -1)$ .
- (D) Hàm  $f$  đạt cực tiểu tại  $(0; -3)$  và tại  $(2; -1)$ .

**Câu 19.** Tìm cực trị của hàm số  $f(x, y) = x^2(y - 1) - 3x + 2$  với điều kiện  $x - y + 1 = 0$ . Hãy chọn khẳng định đúng.

- (A) Hàm  $f$  đạt cực tiểu tại  $(1; 2)$  và cực đại tại  $(-1; 0)$ .
- (B) Hàm  $f$  đạt cực đại tại  $(1; 2)$  và tại  $(-1; 0)$ .
- (C) Hàm  $f$  đạt cực đại tại  $(1; 2)$  và cực tiểu tại  $(-1; 0)$ .
- (D) Hàm  $f$  đạt cực tiểu tại  $(1; 2)$  và tại  $(-1; 0)$ .

**Câu 20.** Tìm cực trị của hàm số  $f(x, y) = 3x + 4y$  với điều kiện  $x^2 + y^2 = 1$ . Hãy chọn khẳng định đúng.

- (A) Hàm  $f$  đạt cực tiểu tại  $\left(\frac{3}{5}; \frac{4}{5}\right)$  và cực đại tại  $\left(-\frac{3}{5}; -\frac{4}{5}\right)$ .
- (B) Hàm  $f$  đạt cực đại tại  $\left(\frac{3}{5}; \frac{4}{5}\right)$  và tại  $\left(-\frac{3}{5}; -\frac{4}{5}\right)$ .
- (C) Hàm  $f$  đạt cực đại tại  $\left(\frac{3}{5}; \frac{4}{5}\right)$  và cực tiểu tại  $\left(-\frac{3}{5}; -\frac{4}{5}\right)$ .
- (D) Hàm  $f$  đạt cực tiểu tại  $\left(\frac{3}{5}; \frac{4}{5}\right)$  và tại  $\left(-\frac{3}{5}; -\frac{4}{5}\right)$ .

**Câu 21.** Cho hàm số  $f(x, y) = x^2 - 2x + y^2$ . Hãy chọn khẳng định đúng.

- (A) Hàm  $f$  đạt cực đại tại  $M(1; 0)$ .
- (B) Hàm  $f$  đạt cực tiểu tại  $M(1; 0)$ .
- (C) Hàm  $f$  có một cực đại và một cực tiểu.
- (D) Hàm  $f$  không có cực trị.

**Câu 22.** Cho hàm số  $f(x, y) = x^4 - 8x^2 + y^2 + 5$ . Hãy chọn khẳng định đúng.

- (A) Hàm  $f$  đạt cực đại tại  $(0; 0)$ .
- (B) Hàm  $f$  đạt cực tiểu tại  $(2; 0)$  và tại  $(-2; 0)$ .
- (C) Hàm  $f$  chỉ có đúng hai điểm dừng.
- (D) Hàm  $f$  đạt cực đại tại  $(2; 0)$  và tại  $(-2; 0)$ .

**Câu 23.** Cho hàm số  $f(x, y) = x^2 - 2x + 5$ . Hãy chọn khẳng định đúng.

- (A) Hàm  $f$  đạt cực đại tại  $M(0; 0)$ .
- (B) Hàm  $f$  đạt cực tiểu tại  $M(0; 0)$ .
- (C) Hàm  $f$  có một điểm dừng.
- (D) Hàm  $f$  có một cực đại và một cực tiểu.

**Câu 24.** Cho hàm số  $f(x, y) = x^2 - xy + y^2$ . Hãy chọn khẳng định đúng.

BỘ MÔN TOÁN GIẢI TÍCH

- Ⓐ Hàm  $f$  đạt cực đại tại  $M(0; 0)$ .
- Ⓑ Hàm  $f$  đạt cực tiểu tại  $M(0; 0)$ .
- Ⓒ Hàm  $f$  không có cực trị.
- Ⓓ Hàm  $f$  không có điểm dừng.

**Câu 25.** Cho hàm số  $f(x, y) = x^3 + y^3 - 12x - 3y$ . Hãy chọn khẳng định đúng.

- Ⓐ Hàm  $f$  đạt cực đại tại  $M(2; 1)$ .
- Ⓑ Hàm  $f$  đạt cực tiểu tại  $M(2; 1)$ .
- Ⓒ Hàm  $f$  có đúng 2 điểm dừng.
- Ⓓ Hàm  $f$  có đúng 4 điểm dừng.

**Câu 26.** Cho hàm số  $f(x, y) = x^4 - y^4 - 4x + 32y$ . Hãy chọn khẳng định đúng.

- Ⓐ Hàm  $f$  đạt cực đại tại  $M(1; 2)$ .
- Ⓑ Hàm  $f$  đạt cực tiểu tại  $M(1; 2)$ .
- Ⓒ Hàm  $f$  không có cực trị.
- Ⓓ Hàm  $f$  không có điểm dừng.

## CHƯƠNG 2. TÍCH PHÂN NHIỀU LỚP

### PHẦN TỰ LUẬN

**Bài 1.** Tính các tích phân hai lớp sau:

- a)  $I = \iint_D (x - y) dx dy$ ;  $D$  là miền giới hạn bởi các đường  $y = x, y = 2 - x^2$
- b)  $I = \iint_D (x^2 + 2y) dx dy$ ;  $D$  là miền giới hạn bởi các đường  $y = x^2 - 1, y = x + 1$ .
- c)  $I = \iint_D (x + y) dx dy$ ;  $D$  là miền phẳng giới hạn bởi các đường  $y = x, y = 0, x + y = 2, x + y = 4$ .
- d)  $I = \iint_D (x^3 + 4y) dx dy$ ;  $D$  là miền phẳng được giới hạn bởi các đường  $y = 0; x = \sqrt{y}; y = 2 - x$ .
- e)  $I = \iint_D xy dx dy$ ;  $D$  là miền phẳng được giới hạn bởi các đường  $x = 0, y = 1, x^2 + y^2 = 2x$ .
- f)  $I = \iint_D (3x + 4y) dx dy$ ;  $D$  là tam giác  $OBC$ ,  $O(0, 0), B(-2, 2), C(2, 0)$ .
- g)  $I = \iint_D \frac{x^2}{y^2} dx dy$ ;  $D$  là miền phẳng được giới hạn bởi các đường  $x = 2, xy = 1, y = x$ .
- h)  $I = \iint_D xy dx dy$ ;  $D$  là miền phẳng được giới hạn bởi các đường  $y = \sqrt{2x - x^2}, y = 0$
- i)  $I = \iint_D x^2 y dx dy$ ;  $D$  là miền phẳng được giới hạn bởi các đường  $y = x^2, y = \frac{x^2}{4}, y = 1$
- j)  $I = \iint_D (x + 2y) dx dy$ ;  $D$  là tam giác  $ABC$ , với  $A(1, 1), B(2, 2), C(4, -2)$ .

**Bài 2. Tính các tích phân sau bằng cách đổi biến:**

a)  $I = \iint_D (x^3 - y^3) dx dy$ ;  $D$  giới hạn bởi  $x + y = 1$ ,  $x + y = 4$ ,  $x - y = 1$ ,  $x - y = -1$ .

b)  $I = \iint_D \sqrt{(x^2 + y^2)^3} dx dy$ ;  $D$  giới hạn bởi các đường  $x = \sqrt{1 - y^2}$ ,  $y = x$ ,  $y = -x$ .

c)  $I = \iint_D (1 + xy) dx dy$ ; với  $D = \{1 \leq x^2 + y^2 \leq 2x\}$

d)  $I = \iint_D \sqrt{x^2 + y^2} dx dy$ , với  $D = \{x^2 + y^2 \leq x, y \geq 0\}$

e)  $I = \iint_D \ln(1 + x^2 + y^2) dx dy$ ; trong đó  $D = \{x^2 + y^2 \leq R^2, y \geq 0\}$ .

**Bài 3. Tính các tích phân ba lớp sau:**

a)  $I = \iiint_V x dx dy dz$ ;  $V$  là tứ diện được giới hạn bởi các mặt  $x + y + z = 1$ ,  $x = 0$ ,  $y = 0$ ,  $z = 0$ .

b)  $I = \iiint_V (z + x^2 + y^2) dx dy dz$ ;  $V$  được giới hạn bởi các mặt  $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ ,  $z = 1$ .

c)  $I = \iiint_V z \sqrt{x^2 + y^2} dx dy dz$ ;  $V$  giới hạn bởi  $z = \sqrt{2 - x^2 - y^2}$ ,  $z = \sqrt{x^2 + y^2}$

d)  $I = \iiint_V \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} dx dy dz$ ; trong đó  $V = \{x^2 + y^2 + z^2 \leq z\}$

e)  $I = \iiint_V (x^2 + y^2 + z^2) dx dy dz$ ; trong đó  $V = \{1 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 4\}$ .

**PHẦN TRẮC NGHIỆM**

**Câu 1.** Cho miền  $D$  được giới hạn bởi các đường thẳng  $x = 3$ ,  $x = 5$ ,  $3x - 2y + 4 = 0$ ,  $3x - 2y + 1 = 0$ .

Tích phân  $I = \iint_D f(x, y) dx dy$  được đưa về tích phân lặp là

**(A)**  $I = \int_3^5 dy \int_{\frac{3x+1}{2}}^{\frac{3x+4}{2}} f(x, y) dx.$

**(B)**  $I = \int_3^5 dx \int_{\frac{3x+1}{2}}^{\frac{3x+4}{2}} f(x, y) dy.$

**(C)**  $I = \int_{\frac{3x+1}{2}}^{\frac{3x+4}{2}} dy \int_3^5 f(x, y) dx.$

**(D)**  $I = \int_3^5 dy \int_{\frac{3x+4}{2}}^{\frac{3x+1}{2}} f(x, y) dx.$

**Câu 2.** Miền phẳng  $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 + 2y \leq 0, x + y \leq 0\}$  được viết lại trong tọa độ cực là:

- (A)  $D_{r\varphi} = \left\{ (\varphi, r) \mid -\frac{\pi}{4} \leq \varphi \leq \pi; 0 \leq r \leq -2 \sin \varphi \right\}$ .
- (B)  $D_{r\varphi} = \left\{ (\varphi, r) \mid -\frac{\pi}{4} \leq \varphi \leq 0; 0 \leq r \leq -2 \sin \varphi \right\}$ .
- (C)  $D_{r\varphi} = \left\{ (\varphi, r) \mid -\pi \leq \varphi \leq -\frac{\pi}{4}; 0 \leq r \leq -2 \sin \varphi \right\}$ .
- (D)  $D_{r\varphi} = \left\{ (\varphi, r) \mid -\pi \leq \varphi \leq -\frac{\pi}{4}; -2 \sin \varphi \leq r \leq 0 \right\}$ .

**Câu 3.** Cho miền phẳng  $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 4y\}$ . Tích phân hai lớp  $I = \iint_D f(x, y) dx dy$

được viết lại trong tọa độ cực là

- (A)  $I = \int_0^\pi d\varphi \int_0^{4 \sin \varphi} f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) r d\varphi$ .
- (B)  $I = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{4 \sin \varphi} f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) r d\varphi$ .
- (C)  $I = \int_0^\pi d\varphi \int_0^{2 \sin \varphi} f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) r d\varphi$ .
- (D)  $I = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{2 \sin \varphi} f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) r d\varphi$ .

**Câu 4.** Giá trị của tích phân  $I = 2 \int_0^1 dy \int_0^y e^{x+y} dx$  là

- (A)  $I = e^2 - 1$ .
- (B)  $I = e^2 - 2e + 1$ .
- (C)  $I = e^2 + 2e + 1$ .
- (D)  $I = e^2 + 2e = 1$ .

**Câu 5.** Giá trị của tích phân  $I = \int_0^2 dx \int_0^{\ln x} 6xe^y dx$  là

- (A)  $I = 4$ .
- (B)  $I = 5$ .
- (C)  $I = 6$ .
- (D)  $I = 7$ .

**Câu 6.** Cho miền phẳng  $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1; x \geq 0; y \geq 0\}$ . Giá trị của tích phân  $I = \iint_D \frac{4 dx dy}{\sqrt{1 + x^2 + y^2}}$  là

- (A)  $I = 2\pi$ .
- (B)  $I = (\sqrt{3} - \sqrt{2}) 2\pi$ .
- (C)  $I = 2\pi\sqrt{2}$ .
- (D)  $I = (\sqrt{2} - 1) 2\pi$ .

**Câu 7.** Cho miền phẳng  $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1; x \geq 0; y \geq 0\}$ . Giá trị của tích phân  $I = \iint_D x^2 y^3 dx dy$  là

- (A)  $I = \frac{2\pi}{15}$ .
- (B)  $I = \frac{4\pi}{15}$ .
- (C)  $I = \frac{2}{105}$ .
- (D)  $I = \frac{4}{105}$ .

**Câu 8.** Trong không gian  $Oxyz$ , cho khối  $\Omega$  được giới hạn bởi các mặt  $x = 0, y = 0, z = 0$  và  $x + y + z + 1 = 0$ . Tích phân ba lớp  $I = \iiint_\Omega dx dy dz$  được đưa về tích phân lặp là

- (A)  $I = \int_0^1 dy \int_0^{1-y} dx \int_0^{1-x-y} f(x, y, z) dz$ .
- (B)  $I = \int_{-1}^0 dy \int_{-1-y}^0 dx \int_{-1-x-y}^0 f(x, y, z) dz$ .
- (C)  $I = \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \int_0^{1-x-y} f(x, y, z) dz$ .
- (D)  $I = \int_{-1}^0 dx \int_{-1-y}^0 dy \int_{-1-x-y}^0 f(x, y, z) dz$ .

**Câu 9.** Trong không gian  $Oxyz$ , cho khối  $\Omega$  được giới hạn bởi các mặt  $z = 4$  và  $z = x^2 + y^2$ . Tích phân ba lớp  $I = \iiint_{\Omega} f(x, y, z) dx dy dz$  được viết trong tọa độ trụ là

- Ⓐ  $I = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^2 r dr \int_{r^2}^4 f(r \cos \varphi, r \sin \varphi, z) dz.$       Ⓑ  $I = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^4 r dr \int_{r^2}^4 f(r \cos \varphi, r \sin \varphi, z) dz.$   
 Ⓒ  $I = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^2 r dr \int_4^{r^2} f(r \cos \varphi, r \sin \varphi, z) dz.$       Ⓓ  $I = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^4 r dr \int_4^{r^2} f(r \cos \varphi, r \sin \varphi, z) dz.$

**Câu 10.** Trong không gian  $Oxyz$ , cho khối  $\Omega$  được giới hạn bởi các mặt  $z = 0$ ,  $z = 1$  và  $x^2 + y^2 + 2y = 0$ . Tích phân ba lớp  $I = \iiint_{\Omega} z \sqrt{x^2 + y^2} dx dy dz$  được viết trong tọa độ trụ là

- Ⓐ  $I = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{-2\sin\varphi} r^2 dr \int_0^1 z dz.$       Ⓑ  $I = \int_0^{\pi} d\varphi \int_0^{-2\sin\varphi} r^2 dr \int_0^1 z dz.$   
 Ⓒ  $I = \int_{\pi}^{2\pi} d\varphi \int_0^{2\sin\varphi} r^2 dr \int_0^1 z dz.$       Ⓓ  $I = \int_0^{\pi} d\varphi \int_0^{2\sin\varphi} r^2 dr \int_0^1 z dz.$

**Câu 11.** Trong không gian  $Oxyz$ , cho khối  $\Omega = \{1 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 4\}$ . Tích phân ba lớp  $I = \iiint_{\Omega} f(x, y, z) dx dy dz$  được viết trong tọa độ cầu là

- Ⓐ  $I = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} \sin\theta d\theta \int_1^4 r f(r \sin\theta \cos\varphi, r \sin\theta \sin\varphi, r \cos\theta) dr.$   
 Ⓑ  $I = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} \sin\theta d\theta \int_1^4 r^2 f(r \sin\theta \cos\varphi, r \sin\theta \sin\varphi, r \cos\theta) dr.$   
 Ⓒ  $I = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} \sin\theta d\theta \int_1^2 r^2 f(r \sin\theta \sin\varphi, r \sin\theta \cos\varphi, r \cos\theta) dr.$   
 Ⓓ  $I = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} \sin\theta d\theta \int_1^2 r^2 f(r \sin\theta \cos\varphi, r \sin\theta \sin\varphi, r \cos\theta) dr.$

**Câu 12.** Giá trị của tích phân  $I = \int_0^1 dx \int_0^x dy \int_0^{y^2} dz$

- Ⓐ  $I = \frac{1}{12}.$       Ⓑ  $I = \frac{1}{6}.$       Ⓒ  $I = \frac{1}{3}.$       Ⓓ  $I = \frac{1}{2}.$

**Câu 13.** Cho miền phẳng  $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$ . Giá trị của tích phân  $I = \iint_D \sqrt{x^2 + y^2} dx dy$  là

- Ⓐ  $I = \frac{2\pi}{3}.$       Ⓑ  $I = \frac{\pi}{3}.$       Ⓒ  $I = \frac{4\pi}{3}.$       Ⓓ  $I = \frac{\pi}{2}.$

**Câu 14.** Cho miền phẳng  $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = x^2, y = 1\}$ . Giá trị của tích phân  $I = \iint_D 2y dx dy$  là

- Ⓐ  $I = \frac{8}{5}.$       Ⓑ  $I = \frac{4}{3}.$       Ⓒ  $I = \frac{2}{3}.$       Ⓓ  $I = \frac{1}{5}.$

**Câu 15.** Cho miền phẳng  $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq x^3\}$ . Tích phân hai lớp  $I = \iint_D f(x, y) dx dy$

được đưa về tích phân lặp là

- (A)  $I = \int_0^1 dy \int_{\sqrt[3]{y}}^1 f(x, y) dx.$ 
 (B)  $I = \int_0^1 dy \int_0^1 f(x, y) dx.$   
 (C)  $I = \int_0^1 dy \int_1^{\sqrt[3]{y}} f(x, y) dx.$ 
 (D)  $I = \int_0^1 dx \int_0^1 f(x, y) dy.$

**Câu 16.** Cho miền phẳng  $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1, y \geq 0\}$ . Tích phân hai lớp  $I = \iint_D f(x, y) dx dy$

được đưa về tích phân lặp là

- (A)  $I = \int_{-1}^1 dy \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} f(x, y) dx.$ 
 (B)  $I = \int_0^1 dy \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} f(x, y) dx.$   
 (C)  $I = \int_{-1}^1 dy \int_0^{\sqrt{1-y^2}} f(x, y) dx.$ 
 (D)  $I = \int_0^1 dy \int_0^{\sqrt{1-y^2}} f(x, y) dx.$

**Câu 17.** Trong không gian  $Oxyz$ , cho khối  $\Omega$  được giới hạn bởi các mặt  $z = 0, z = 1$  và  $x^2 + y^2 = 1$ .

Giá trị của tích phân  $I = \iiint_{\Omega} \frac{dx dy dz}{\sqrt{x^2 + y^2}}$  là

- (A)  $I = 2\pi.$  (B)  $I = \pi.$  (C)  $I = 3\pi.$  (D)  $I = 4\pi.$

**Câu 18.** Trong không gian  $Oxyz$ , cho khối  $\Omega$  được giới hạn bởi các mặt  $z = 0, z = 3$  và  $x^2 + y^2 = 4$ .

Giá trị của tích phân  $I = \iiint_{\Omega} (\sqrt{x^2 + y^2} + 1) dx dy dz$  là

- (A)  $I = \frac{84\pi}{3}.$  (B)  $I = \frac{80\pi}{3}.$  (C)  $I = \frac{4\pi}{3}.$  (D)  $I = \frac{8\pi}{3}.$

**Câu 19.** Trong không gian  $Oxyz$ , cho khối  $\Omega = \{x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2, z \geq 0\}$ . Tích phân ba lớp  $I =$

$\iiint_{\Omega} \frac{dx dy dz}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$  được viết trong tọa độ cầu là

- (A)  $I = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin \theta d\theta \int_0^R r^2 dr.$ 
 (B)  $I = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin \theta d\theta \int_0^R r dr.$   
 (C)  $I = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \theta d\theta \int_0^R r dr.$ 
 (D)  $I = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \theta d\theta \int_0^R r^2 dr.$

**Câu 20.** Cho miền  $D$  được giới hạn bởi các đường thẳng  $y = \sqrt{x}, y = x^3$ . Tích phân bội hai

$I = \iint_D dx dy$  có giá trị là

- (A)  $I = \frac{\sqrt{2}}{3}.$  (B)  $I = \frac{5}{12}.$  (C)  $I = \frac{5}{6}.$  (D)  $I = \frac{5}{3}.$

**Câu 21.** Cho miền phẳng  $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 16, x \geq 0, y \geq 0\}$ . Tích phân bội hai  $I = \iint_D xy dx dy$  có giá trị là

(A)  $I = 32$ .                      (B)  $I = 64$ .                      (C)  $I = 90$ .                      (D)  $I = 120$ .

**Câu 22.** Trong không gian  $Oxyz$ , cho khối  $\Omega = [0, 1] \times [0, 1] \times [0, 1]$ . Giá trị của tích phân ba lớp  $I = \iiint_{\Omega} 24xy^2z^3$  là

(A)  $I = 1$ .                      (B)  $I = 2$ .                      (C)  $I = 3$ .                      (D)  $I = 4$ .

**Câu 23.** Trong không gian  $Oxyz$ , cho khối  $\Omega$  được giới hạn bởi các mặt  $z = \sqrt{x^2 + y^2}$  và  $z = 1$ . Giá trị của tích phân ba lớp  $I = \iiint_{\Omega} 2z dx dy dz$  là

(A)  $I = \frac{\pi}{2}$ .                      (B)  $I = \frac{3\pi}{2}$ .                      (C)  $I = 2\pi$ .                      (D)  $I = \pi$ .

**Câu 24.** Cho miền  $D$  giới hạn bởi các đường  $y = x^2$  và  $y = 2 - x$ . Tích phân bội hai  $I = \iint_D (x - y) dx dy$  có giá trị là

(A)  $I = \frac{189}{20}$ .                      (B)  $I = -\frac{189}{20}$ .                      (C)  $I = -\frac{81}{20}$ .                      (D)  $I = \frac{81}{20}$ .

**Câu 25.** Cho miền phẳng  $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 2x, y \geq 0\}$ . Tích phân bội hai  $I = \iint_D (\sqrt{x^2 + y^2} + x) dx dy$  được viết lại trong tọa độ cực là

(A)  $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{2\cos\varphi} (1 + \cos\varphi) r^2 d\varphi$ .                      (B)  $I = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{2\cos\varphi} (1 + \cos\varphi) r^2 d\varphi$ .

(C)  $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{2\cos\varphi} (1 + \cos\varphi) r d\varphi$ .                      (D)  $I = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{2\cos\varphi} (1 + \cos\varphi) r d\varphi$ .

### CHƯƠNG 3. TÍCH PHÂN ĐƯỜNG VÀ TÍCH PHÂN MẶT

#### PHẦN TỰ LUẬN

**Bài 1. Tính tích phân đường loại 1**

a)  $I = \int_{\widetilde{AB}} x^2 ds$ ,  $\widetilde{AB}$  là cung  $y = \ln x$  và  $A(1, 0)$ ,  $B(e, 1)$ .

b)  $I = \int_{\widetilde{OA}} \frac{ds}{\sqrt{x^2 + y^2 + 4}}$ ,  $\widetilde{OA}$  là đoạn thẳng nối gốc  $O(0, 0)$  với điểm  $A(1, 2)$ .

c)  $I = \int_L (x^2 + y^2) ds$ ,  $L$  là biên của tam giác  $OAB$  với  $O(0, 0)$ ,  $A(1, 1)$ ,  $B(-1, 1)$ .

d)  $I = \int_L (x + y) ds; L : x^2 + y^2 = ax, a > 0$

e)  $I = \int_L (x + y + z) ds; L$  là đường cong  $x = 2 \cos t, y = 2 \sin t, z = t, 0 \leq t \leq 2\pi$

f)  $I = \int_C (x^{\frac{4}{3}} + y^{\frac{4}{3}}) ds; C : x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}, a > 0$

g)  $I = \int_C \sqrt{x^2 + y^2} ds; C : x^2 + y^2 = 2y.$

**Bài 2. Tính tích phân đường loại 2**

a)  $I = \int_L ye^{xy} dx + x^4 e^{xy} dy; \text{ trong đó } L: y = x^2 \text{ đi từ } A(0,0) \rightarrow B(1,1).$

b)  $I = \int_L \frac{x^2 dy - y^2 dx}{x^{5/3} + y^{5/3}}; \text{ trong đó: } L : \begin{cases} x = R \cos^3 t \\ y = R \sin^3 t \end{cases}, 0 \leq t \leq \pi/2.$

c)  $I = \oint_L |x| dx + |y| dy; L$  là đường gấp khúc nối các điểm  $A(1,0) \rightarrow B(0,2) \rightarrow C(-1,0) \rightarrow D(0,-2) \rightarrow A(1,0).$

d)  $I = \oint_{L^+} 2(x^2 + y^2) dx + (x + y)^2 dy, L$  là biên của tam giác  $\triangle LMN, L(1,1), M(2,2), N(1,3).$

e)  $I = \oint_{L^+} (xy + x + y) dx + (xy + x - y) dy; \text{ trong đó } L: x^2 + y^2 = ax, a > 0.$

f)  $I = \int_{(2,1)}^{(4,3)} e^{xy}(1 + xy) dx + x^2 e^{xy} dy.$

g)  $I = \oint_{L^+} (-x^2 y) dx + xy^2 dy; L : \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{1} = 1.$

h)  $I = \oint_{L^+} \frac{(x + y) dx - (x - y) dy}{x^2 + y^2}; L : x^2 + y^2 = 4.$

i)  $I = \int_{(0,0)}^{(1,1)} (x + y) dx + (x - y) dy.$

j)  $I = \int_L (x + y + z) dx - x dy + xy dz; \text{ trong đó } L \text{ là đoạn thẳng đi từ } A(1,2,3) \text{ đến } B(2,4,5).$

BÀI TẬP GIẢI TÍCH 2

**Bài 3. Tính tích phân mặt loại 1**

- a)  $I = \iint_S (x^2 + y^2) dS$ ;  $S$  là phần mặt cầu  $x^2 + y^2 + z^2 = a^2, z \geq 0$ .
- b)  $I = \iint_S (x^2 + z^2) dS$ ; trong đó  $S$  là phần mặt  $z = \sqrt{2 - x^2 - y^2}, z \geq 1$ .
- c)  $I = \iint_S \frac{dS}{(1 + x + y)^2}$ ;  $S$  là phần mặt  $x + y + z = 1$  nằm trong góc phần tám thứ nhất.
- d)  $\iint_S xyz dS$ ,  $S$  là phần mặt  $z = x^2 + y^2$  giới hạn bởi  $z = 1$ .
- e)  $I = \iint_S \left( z + 2x + \frac{4y}{3} \right) dS$ ; trong đó  $S$  là phần mặt  $\frac{x}{2} + \frac{y}{3} + \frac{z}{4} = 1$  nằm trong góc phần tám thứ nhất.

**Bài 4. Tính tích phân mặt loại 2**

- a)  $I = \iint_S z dx dy$ ;  $S$  là phía ngoài mặt cầu  $x^2 + y^2 + z^2 = 1; z \geq 0$ .
- b)  $I = \iint_S yz dx dy$ ;  $S$  là mặt phía ngoài của vật thể giới hạn bởi  $x^2 + y^2 \leq 1, 0 \leq z \leq 1$ .
- c)  $I = \iint_S y^2 dx dz + z^2 dx dy$ ;  $S$  là mặt phía ngoài của vật thể giới hạn bởi các mặt  $z = x^2 + y^2, z = 1$ .

**PHẦN TRẮC NGHIỆM**

**Câu 1.** Cho đường cong  $C$  có phương trình tham số  $x = 2 \cos t, y = 2 \sin t, 0 \leq t \leq \pi$ . Giá trị của tích phân  $I = \int_C x^2 ds$  là

- (A)  $I = 2\pi.$
- (B)  $I = 4\pi.$
- (C)  $I = 6\pi.$
- (D)  $I = 8\pi.$

**Câu 2.** Cho đường cong  $L$  là đoạn thẳng nối điểm  $A(0, 2)$  và điểm  $B(-2, -3)$ . Giá trị của tích phân  $I = \int_L (x^2 - y) ds$  là

- (A)  $I = \frac{13}{6} \sqrt{29}.$
- (B)  $I = \frac{13}{8} \sqrt{29}.$
- (C)  $I = \frac{11}{6} \sqrt{29}.$
- (D)  $I = \frac{11}{8} \sqrt{29}.$

**Câu 3.** Cho đường cong  $\widetilde{OA}$  có phương trình  $y = x^2$  nối điểm  $O(0, 0)$  và điểm  $A(-2, 4)$ . Giá trị của tích phân  $I = \int_{\widetilde{OA}} \frac{3y}{\sqrt{4x^2 + 1}} ds$  là

- (A)  $I = 12.$
- (B)  $I = -12.$
- (C)  $I = -8.$
- (D)  $I = 8.$

**Câu 4.** Cho đường tròn  $C$  có phương trình  $x^2 + y^2 - 2y = 0$ . Giá trị của tích phân  $I = \int_C (x^2 + y^2) ds$  là

- (A)  $I = 4\pi\sqrt{2}$ .      (B)  $I = 4\pi$ .      (C)  $I = 8\pi$ .      (D)  $I = 8\pi\sqrt{2}$ .

**Câu 5.** Một dây thép có dạng đoạn thẳng trong mặt phẳng  $Oxy$  nối điểm  $A(1, 1)$  và điểm  $B(3, -5)$  với hàm mật độ khối lượng là  $\rho(x, y) = (x - y)^2$ . Khối lượng của dây thép đã cho là

- (A)  $m = \frac{16}{3}\sqrt{10}$ .      (B)  $m = \frac{32}{3}\sqrt{10}$ .      (C)  $m = \frac{125}{3}\sqrt{10}$ .      (D)  $m = \frac{128}{3}\sqrt{10}$ .

**Câu 6.** Một dây thép có dạng parabol  $y = x^2$  trong mặt phẳng  $Oxy$  nối điểm  $O(0, 0)$  và điểm  $A(1, 1)$  với hàm mật độ khối lượng là  $\rho(x, y) = x\sqrt{1 + 4y}$ . Khối lượng của dây thép đã cho là

- (A)  $m = \frac{3}{4}$ .      (B)  $m = \frac{4}{3}$ .      (C)  $m = \frac{3}{2}$ .      (D)  $m = \frac{2}{3}$ .

**Câu 7.** Cho đường cong  $\widetilde{AB}$  có phương trình tham số  $x = t^2, y = 4 - t$  với  $A(0, 4)$  và  $B(4, 6)$ . Giá trị của tích phân  $I = \int_{\widetilde{AB}} x dx + (x - y) dy$  là

- (A)  $I = \frac{2}{3}$ .      (B)  $I = -\frac{2}{3}$ .      (C)  $I = \frac{34}{3}$ .      (D)  $I = -\frac{34}{3}$ .

**Câu 8.** Tích phân không phụ thuộc vào các đường tròn từng khúc nối hai điểm  $A$  và  $B$  là

- (A)  $I = \int_{\widetilde{AB}} (4xy^3 + 2x) dx + (y^4 + 2y - x) dy$ .  
 (B)  $I = \int_{\widetilde{AB}} (4xy^3 + 2x - 1) dx + (y^4 + 6x^2y^2 - 1) dy$ .  
 (C)  $I = \int_{\widetilde{AB}} (4xy^3 + 2x) dx - (y^4 + 2y - x) dy$ .  
 (D)  $I = \int_{\widetilde{AB}} (4xy^3 + 2x - 1) dx - (y^4 + 6x^2y^2 - 1) dy$ .

**Câu 9.** Cho đường cong  $\widetilde{AB}$  có phương trình  $y = \ln x$  với  $A(1, 0)$  và  $B(e, 1)$ . Giá trị của tích phân  $I = \int_{\widetilde{AB}} 5x^4y^5 dx + 5x^5y^4 dy$  là

- (A)  $I = 0$ .      (B)  $I = -e^3$ .      (C)  $I = e^5$ .      (D)  $I = -e^5$ .

**Câu 10.** Cho đường cong  $\widetilde{AB}$  có phương trình  $y = x^3 - 3x + 2$  với  $A(1, 0)$  và  $B(0, 2)$ . Giá trị của tích phân  $I = \int_{\widetilde{AB}} e^y dx + xe^y dy$  là

- (A)  $I = 1$ .      (B)  $I = -1$ .      (C)  $I = e$ .      (D)  $I = -e$ .

**Câu 11.** Công sinh ra khi lực  $\vec{F}(x, y) = 3x^2\vec{i} + 2y\vec{j}$  tác động lên chất điểm  $M(x, y)$  làm dịch chuyển từ điểm  $A(2, 4)$  đến điểm  $B(-1, 1)$  trên đường cong  $C: y = x^2$  là

- (A)  $W = -24$ .      (B)  $W = 24$ .      (C)  $W = -12$ .      (D)  $W = 12$ .

**Câu 12.** Công sinh ra khi lực  $\vec{F}(x, y, z) = x\vec{i} - xy\vec{j} - xyz\vec{k}$  tác động lên chất điểm  $M(x, y, z)$  làm dịch chuyển từ điểm  $A(1, 1, -1)$  đến điểm  $B(1, 0, 0)$  trên đường cong  $C: x = 1, y = t^2, z = -t$  là

- Ⓐ  $W = -\frac{1}{4}$ .      Ⓑ  $W = \frac{1}{4}$ .      Ⓒ  $W = \frac{3}{4}$ .      Ⓓ  $W = -\frac{3}{4}$ .

**Câu 13.** Cho tích phân  $I = \iint_S x dS$ , trong đó  $S$  là hình  $\triangle ABC$  với  $A(1, 0, 0)$ ,  $B(0, 2, 0)$ ,  $C(0, 0, 4)$ .

Giá trị của tích phân  $I$  là

- Ⓐ  $I = \frac{\sqrt{21}}{3}$ .      Ⓑ  $I = \frac{\sqrt{21}}{4}$ .      Ⓒ  $I = \frac{\sqrt{21}}{5}$ .      Ⓓ  $I = \frac{\sqrt{21}}{6}$ .

**Câu 14.** Cho  $S$  là phần mặt parabolic có phương trình  $z = x^2 + y^2$  nằm dưới mặt phẳng  $z = 4$ . Giá trị của tích phân  $I = \iint_S z dS$  là

- Ⓐ  $I = \frac{391\sqrt{17} + 1}{120}\pi$ .      Ⓑ  $I = \frac{391\sqrt{17}}{120}\pi$ .      Ⓒ  $I = \frac{391\sqrt{17} + 1}{60}\pi$ .      Ⓓ  $I = \frac{391\sqrt{17}}{60}\pi$ .

**Câu 15.** Diện tích của phần mặt nón  $z = \sqrt{x^2 + y^2}$  nằm phía dưới mặt phẳng  $z = 1$  là

- Ⓐ  $S = 4\pi\sqrt{2}$ .      Ⓑ  $S = 3\pi\sqrt{2}$ .      Ⓒ  $S = 2\pi\sqrt{2}$ .      Ⓓ  $S = \pi\sqrt{2}$ .

**Câu 16.** Diện tích của phần mặt parabolic  $z = 4 - x^2 - y^2$  nằm trong mặt trụ  $x^2 + y^2 - 2y = 0$  được tính theo công thức

- Ⓐ  $S = \int_0^\pi d\varphi \int_0^{2\sin\varphi} r\sqrt{1+r^2} dr$ .      Ⓑ  $S = \int_0^\pi d\varphi \int_0^{2\sin\varphi} r\sqrt{1+4r^2} dr$ .  
 Ⓒ  $S = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{2\sin\varphi} r\sqrt{1+8r^2} dr$ .      Ⓓ  $S = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\sin\varphi} r\sqrt{1+16r^2} dr$ .

**Câu 17.** Tích phân mặt loại hai  $I = \iint_S x dx dy - y dz dx + z dy dz$  với  $S$  là một phần mặt phía trên

của mặt phẳng  $x + 2y - 2z = 0$  có biểu diễn thành tích phân mặt loại một là

- Ⓐ  $I = \frac{1}{3} \iint_S (x - 2y - 2z) dS$ .      Ⓑ  $I = -\frac{1}{3} \iint_S (2x - 2y + z) dS$ .  
 Ⓒ  $I = -\frac{1}{3} \iint_S (x - 2y - 2z) dS$ .      Ⓓ  $I = \frac{1}{3} \iint_S (2x + 2y - z) dS$ .

**Câu 18.** Tích phân mặt loại hai  $I = \iint_S dx dy$  với  $S$  là một phần mặt phía dưới của mặt phẳng

$z = 2$  được giới hạn bởi  $x^2 + y^2 \leq 1$ , có giá trị là

- Ⓐ  $I = \pi$ .      Ⓑ  $I = -\pi$ .      Ⓒ  $I = 2\pi$ .      Ⓓ  $I = -2\pi$ .

**Câu 19.** Tích phân mặt loại hai  $I = 12 \iint_S x dx dy$  với  $S$  là một phần mặt phía trên của mặt phẳng

$z = 2$  được giới hạn bởi  $x \geq 0$ ,  $y \geq 0$  và  $x + y \leq 1$  có giá trị là

- Ⓐ  $I = 1$ .      Ⓑ  $I = 4$ .      Ⓒ  $I = 2$ .      Ⓓ  $I = 3$ .

**Câu 20.** Tích phân mặt loại hai  $I = \iint_S 4y^2 z dx dy + x^2 y dx dz + x^3 dy dz$ , với  $S$  là mặt biên ngoài

của vật thể được giới hạn bởi  $z = 2$ ,  $z = 0$  và  $x^2 + y^2 = 1$ , có giá trị là

- Ⓐ  $I = \pi$ .      Ⓑ  $I = 2\pi$ .      Ⓒ  $I = 4\pi$ .      Ⓓ  $I = 8\pi$ .

**Câu 21.** Tích phân mặt loại hai  $I = \iint_S x^2 z dx dy + x z^2 dy dz + \frac{y^3}{3} dz dx$ , với  $S$  là mặt biên ngoài của hình cầu  $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$ , có giá trị là  
 (A)  $I = \frac{\pi}{5}$ .      (B)  $I = \frac{2\pi}{5}$ .      (C)  $I = \frac{3\pi}{5}$ .      (D)  $I = \frac{4\pi}{5}$ .

**Câu 22.** Tích phân mặt loại hai  $I = \iint_S 3x dy dz + 2z dz dx + dx dy$ , với  $S$  là mặt biên ngoài của hình cầu  $x^2 + y^2 + z^2 \leq 2z$ , có giá trị là  
 (A)  $I = \pi$ .      (B)  $I = 2\pi$ .      (C)  $I = 4\pi$ .      (D)  $I = 8\pi$ .

**Câu 23.** Tích phân mặt loại hai  $I = \iint_S x^2 dy dz + z^2 dx dy$ , với  $S$  là mặt biên ngoài của vật thể bị chặn được giới hạn bởi  $z = \sqrt{x^2 + y^2}$  và  $z = 1$ , có giá trị là  
 (A)  $I = \frac{\pi}{2}$ .      (B)  $I = \frac{3\pi}{4}$ .      (C)  $I = \frac{2\pi}{3}$ .      (D)  $I = \frac{5\pi}{6}$ .

**Câu 24.** Cho  $S$  là một phần của mặt phẳng  $x + y + z = 1$  được giới hạn bởi  $x^2 + y^2 \leq 1$  có hàm mật độ khối lượng  $\rho(x, y, z) = x^2 + y^2$ . Khối lượng của  $S$  là  
 (A)  $m = \frac{\pi\sqrt{3}}{2}$ .      (B)  $m = \frac{\pi\sqrt{3}}{3}$ .      (C)  $m = \frac{\pi\sqrt{3}}{4}$ .      (D)  $m = \frac{\pi\sqrt{3}}{6}$ .

**Câu 25.** Cho  $S$  là một phần của mặt parabolic  $z = x^2 + y^2$  được giới hạn bởi  $x^2 + y^2 \leq 4$  có hàm mật độ khối lượng  $\rho(x, y, z) = \sqrt{1 + 4z}$ . Khối lượng của  $S$  được tính theo công thức  
 (A)  $m = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^2 r(1 + 4r^2) dr$ .      (B)  $m = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^2 r\sqrt{1 + 4r^2} dr$ .  
 (C)  $m = \int_0^\pi d\varphi \int_0^2 r(1 + 4r^2) dr$ .      (D)  $m = \int_0^\pi d\varphi \int_0^2 r\sqrt{1 + 4r^2} dr$ .

**CHƯƠNG 4. PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN**

**PHẦN TỰ LUẬN**

**Bài 1.** Giải các phương trình tách biến

- (1)  $x\sqrt{1 - y^2} dx + y\sqrt{1 - x^2} dy = 0$
- (2)  $y' = x^2 + xy + \frac{y^2}{4} - 1$
- (3)  $y' = (x + y + 1)^2$
- (4)  $y' = \cos(x - y - 1)$

**Bài 2 .** Giải các phương trình đẳng cấp

- (1)  $y' = e^{-\frac{y}{x}} + \frac{y}{x}$
- (2)  $xy' - y + x \cos \frac{y}{x} = 0$
- (3)  $xy' - y = (x + y) \ln \frac{x + y}{x}$
- (4)  $y' = \frac{y}{x} + \cos \frac{y}{x}$
- (5)  $y' = \frac{3x^2 - xy - y^2}{x^2}$
- (6)  $y' = \frac{x^2 - xy + y^2}{xy}$

**Bài 3.** Giải các phương trình vi phân tuyến tính cấp 1

BÀI TẬP GIẢI TÍCH 2

(1)  $y' - \frac{2}{x+1}y = (x+1)^3$

(4)  $(x^2 + y)dx = xdy$

(2)  $y' + y = \frac{1}{e^x(1-x)}, y(2) = 1.$

(5)  $(y + \ln x)dx - xdy = 0$

(3)  $y' + 2xy = xe^{-x^2}$

(6)  $y' \cos y + \sin y = x$

**Bài 4.** Giải các phương trình Becnoulli

(1)  $y' - 2xy = 3x^3y^2$

(4)  $xy' + y = y^2 \ln x; y(1) = 1$

(2)  $2y' - \frac{x}{y} = \frac{xy}{x^2 - 1}$

(5)  $ydx - (x^2y^2 + x)dy = 0$

(3)  $y' + 2y = y^2e^x$

(6)  $xy' - 2x\sqrt{y} \cos x = -2y$

**Bài 5.** Giải các phương trình vi phân toàn phần

(1)  $(x + y)dx + (x - y)dy = 0; y(0) = 0.$

(3)  $\frac{2x}{y^3}dx + \frac{y^2 - 3x^2}{y^4}dy = 0$

(2)  $(1 + e^{\frac{x}{y}})dx + e^{\frac{x}{y}}\left(1 - \frac{x}{y}\right)dy = 0$

(4)  $(1 + y^2 \sin 2x)dx - 2y \cos^2 x dy = 0$

**Bài 6.** Giải các phương trình vi phân tuyến tính cấp 2 với hệ số hằng

(1)  $y'' - 2y' + y = 2e^{2x}.$

(7)  $4y'' - 4y' + y = xe^{\frac{1}{2}x}$

(2)  $y'' - 6y' + 9y = \cos 3x.$

(8)  $y'' + 2y' + 2y = e^x \sin x.$

(3)  $2y'' + 3y' + y = xe^{-x}$

(9)  $y'' + 9y = \cos 3x + e^x$

(4)  $y'' + 2y' + 2y = x^2 - 4x + 3$

(10)  $y'' + y = 4xe^x$

(5)  $y'' - 4y' = 4x^2 + 3x + 2;$

(11)  $y'' + y = 6 \sin x$

$y(0) = 0, y'(0) = 2$

(12)  $y'' - 2y' + y = xe^x$

(6)  $y'' + 4y' + 4y = 3e^{-2x},$

(13)  $y'' - 4y' = x^2 + 2x + 3$

$y(2) = y'(2) = 0$

(14)  $y'' - 2y' = 2 \cos^2 x$

**PHẦN TRẮC NGHIỆM**

**Câu 1.** Phương trình vi phân  $\frac{dx}{1+x^2} + \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}} = 0$  có nghiệm tổng quát là

(A)  $y = C - \sin(\arctan x).$

(B)  $y = \sin(C - \arctan x).$

(C)  $y = \sin C - \sin(\arctan x).$

(D)  $y = \arctan(C - \sin x).$

**Câu 2.** Phương trình vi phân  $x(y^2 + 1)dx = y(x^2 + 1)dy$  có nghiệm tổng quát là

(A)  $(x^2 + 1)(y^2 + 1) = C.$

(B)  $(x^2 + 1) + (y^2 + 1) = C.$

(C)  $(y^2 + 1) = (x^2 + 1) + C.$

(D)  $y^2 = C(x^2 + 1) - 1.$

**Câu 3.** Phương trình vi phân  $\frac{dx}{x(y-1)} + \frac{dy}{y(x+2)} = 0$  với điều kiện  $y(1) = 1$  có nghiệm là

- (A)  $x^2 = ye^{2-x-y}$ .      (B)  $y^2 = xe^{2-x-y}$ .      (C)  $x^2y = e^{2-x-y}$ .      (D)  $xy^2ye^{2-x-y}$ .

**Câu 4.** Phương trình vi phân  $y' = e^{x+y} + e^{x-y}$  với điều kiện  $y(0) = 0$  có nghiệm là

- (A)  $e^y = \tan\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$ .      (B)  $e^x = \tan\left(y + \frac{\pi}{4}\right)$ .  
 (C)  $e^y = \tan\left(e^x + \frac{\pi}{4} - 1\right)$ .      (D)  $e^x = \tan\left(e^y + \frac{\pi}{4} - 1\right)$ .

**Câu 5.** Phương trình vi phân  $y \ln^3 y + \sqrt{x+1}y' = 0$  với điều kiện  $y(0) = e$  có nghiệm là

- (A)  $\ln^2 y = \frac{1}{2\sqrt{x+1}} + \frac{1}{2}$ .      (B)  $2\ln^2 y = \frac{1}{\sqrt{x+1}} + 1$ .  
 (C)  $\frac{1}{2\ln^2 y} = 2\sqrt{x+1} - \frac{3}{2}$ .      (D)  $\frac{1}{\ln^2 y} = 2\sqrt{x+1} - 1$ .

**Câu 6.** Phương trình vi phân  $(xy' - y) \arctan \frac{y}{x} = x$  có nghiệm tổng quát là

- (A)  $x^2 + y^2 = Ce^{\frac{y}{x} \arctan \frac{y}{x}}$ .      (B)  $x^2 + y^2 = Ce^{2\frac{y}{x} \arctan \frac{y}{x}}$ .  
 (C)  $x^2 + y^2 = Ce^{\frac{y}{x} + \arctan \frac{y}{x}}$ .      (D)  $x^2 + y^2 = Ce^{\frac{y}{x} - \arctan \frac{y}{x}}$ .

**Câu 7.** Phương trình vi phân  $xy' = y + x \sin \frac{y}{x}$  với điều kiện  $y(1) = \frac{\pi}{2}$  có nghiệm là

- (A)  $1 - \cos \frac{y}{x} = x^2 \left(\cos \frac{y}{x} + 1\right)$ .      (B)  $\cos \frac{y}{x} = x^2 \left(\cos \frac{y}{x} + 1\right) - 1$ .  
 (C)  $\cos \frac{y}{x} = x^2 \left(\cos \frac{y}{x} + 1\right) + 1$ .      (D)  $\cos \frac{y}{x} - 1 = x^2 \left(\cos \frac{y}{x} + 1\right)$ .

**Câu 8.** Phương trình vi phân  $xy' = y + x$  với điều kiện  $y(1) = 2$  có nghiệm là

- (A)  $y = x(\ln x + 2x)$ .      (B)  $y = x \ln x + 2$ .      (C)  $y = 2(\ln x + x)$ .      (D)  $y = x(\ln x + 2)$ .

**Câu 9.** Phương trình vi phân  $xy' = 2y - 2\sqrt{xy}$  có nghiệm tổng quát là

- (A)  $\sqrt{\frac{y}{x}} - 2 = C + \sqrt{x}$ .      (B)  $\sqrt{\frac{y}{x}} + 2 = C - \sqrt{x}$ .  
 (C)  $\sqrt{\frac{y}{x}} - 2 = C\sqrt{x}$ .      (D)  $\sqrt{\frac{y}{x}} + 2 = C\sqrt{x}$ .

**Câu 10.** Phương trình vi phân  $(2xy + \sin y) dx + (x^2 + x \cos y) dy = 0$  có nghiệm tổng quát là

- (A)  $x^2y + x \sin y = C$ .      (B)  $x^2y + x \cos y = C$ .  
 (C)  $2x^2y + x \sin y + xy = C$ .      (D)  $x^2y + 2x \sin y = C$ .

**Câu 11.** Phương trình vi phân  $(e^{x+y} + 3x^2) dx + (e^{x+y} + 4y^3) dy = 0$  với điều kiện  $y(0) = 0$  có nghiệm là

- (A)  $y^3 + x^4 + e^{x+y} - 1 = 0$ .      (B)  $y^4 + x^3 + e^{x+y} - 1 = 0$ .  
 (C)  $y^3 - x^4 + e^{x+y} - 1 = 0$ .      (D)  $y^4 - x^3 + e^{x+y} - 1 = 0$ .

**Câu 12.** Phương trình vi phân  $xy' - y = x^2 \cos x$  có nghiệm tổng quát là

- (A)  $y = x \sin x - \frac{2 \sin x}{x^2} + C$ .      (B)  $y = x \sin x - \frac{2 \sin x}{x^2} + Cx$ .  
 (C)  $y = x \sin x + C$ .      (D)  $y = x \sin x + Cx$ .

**Câu 13.** Phương trình vi phân  $4xy' + 3y = -e^x x^4 y^5$  có nghiệm tổng quát là

- (A)  $y^4 = \frac{1}{x^3(C - e^{-x})}$ .      (B)  $y^4 = \frac{1}{x^2(C - e^{-x})}$ .  
 (C)  $y^4 = \frac{1}{x^3(C + e^x)}$ .      (D)  $y^4 = \frac{1}{x^2(C + e^x)}$ .

**Câu 14.** Phương trình vi phân  $y' + \frac{4}{x}y = \frac{3}{x^4}$  với điều kiện  $y(1) = 0$  có nghiệm là

**A**  $y = \frac{3(x-1)}{x^4}$ .     
  **B**  $y = \frac{3(1-x)}{x^4}$ .     
  **C**  $y = \frac{3(x-1)}{x^5}$ .     
  **D**  $y = \frac{3(1-x)}{x^5}$ .

**Câu 15.** Phương trình vi phân  $\sqrt{1-x^2}y' + y = \arcsin x$  với điều kiện  $y(0) = 0$  có nghiệm là

**A**  $y = \arcsin x + e^{\arcsin x} - 1$ .     
  **B**  $y = \arcsin x + e^{-\arcsin x} - 1$ .  
 **C**  $y = \arcsin x - e^{\arcsin x} + 1$ .     
  **D**  $y = \arcsin x - e^{-\arcsin x} + 1$ .

**Câu 16.** Phương trình vi phân  $y'' - 4y' + 3y = 0$  có nghiệm tổng quát là

**A**  $y = C_1e^x + C_2e^{3x}$ .     
  **B**  $y = e^x (C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x)$ .  
 **C**  $y = e^{3x} (C_1 \cos x + C_2 \sin x)$ .     
  **D**  $y = C_1x^3 + C_2x$ .

**Câu 17.** Phương trình vi phân  $y'' + 2y' + 2y = 0$  có nghiệm tổng quát là

**A**  $y = e^x (C_1 \cos x + C_2 \sin x)$ .     
  **B**  $y = e^{-x} (C_1 \cos x + C_2 \sin x)$ .  
 **C**  $y = e^x (C_1 \cos(-x) + C_2 \sin(-x))$ .     
  **D**  $y = e^{-x} (C_1 \cos(2x) + C_2 \sin(2x))$ .

**Câu 18.** Phương trình vi phân  $y'' + 3y' = 0$  với điều kiện  $y(0) = 1$  và  $y'(0) = 2$  có nghiệm là

**A**  $y = \frac{1}{2} (5 - 3e^{3x})$ .     
  **B**  $y = \frac{1}{3} (5 - 2e^{3x})$ .     
  **C**  $y = \frac{1}{2} (5 - 3e^{-3x})$ .     
  **D**  $y = \frac{1}{3} (5 - 2e^{-3x})$ .

**Câu 19.** Phương trình vi phân  $y'' + 9y = 0$  với điều kiện  $y\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0$  và  $y'\left(\frac{\pi}{4}\right) = -1$  có nghiệm là

**A**  $y = \frac{\sqrt{2}}{6} (\cos 3x - \sin 3x)$ .     
  **B**  $y = \frac{\sqrt{2}}{6} (\cos 3x + \sin 3x)$ .  
 **C**  $y = \frac{6 - \sqrt{2}}{6} + \frac{\sqrt{2}}{6} \cos 3x$ .     
  **D**  $y = \frac{6 + \sqrt{2}}{6} - \frac{\sqrt{2}}{6} \cos 3x$ .

**Câu 20.** Phương trình vi phân  $y'' - 4y' + 3y = e^{5x}$  với điều kiện  $y(0) = 3$  và  $y'(0) = 9$  có nghiệm là

**A**  $y = e^{5x} + e^{3x} + e^x$ .     
  **B**  $y = 2e^{5x} + e^{3x} - e^x$ .  
 **C**  $y = \frac{1}{8} (e^{5x} + 22e^{3x} + e^x)$ .     
  **D**  $y = \frac{1}{2} (-e^{5x} + 5e^{3x} + 2e^x)$ .

**Câu 21.** Phương trình vi phân  $y'' - 6y' + 5 = 0$  có nghiệm tổng quát là

**A**  $y = C_1e^x + C_2e^{5x} - x$ .     
  **B**  $y = C_1e^x + C_2e^{5x} + x + 1$ .  
 **C**  $y = C_1 + C_2e^{6x} - \frac{5}{6}x$ .     
  **D**  $y = C_1 + C_2e^{6x} + \frac{5}{6}x$ .

**Câu 22.** Phương trình vi phân  $y'' + 4y + 4 = 0$  có nghiệm tổng quát là

**A**  $y = C_1 + C_2e^{-4x} - 1$ .     
  **B**  $y = C_1 + C_2 \cos 2x - 1$ .  
 **C**  $y = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x - 1$ .     
  **D**  $y = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x + 1$ .

**Câu 23.** Phương trình vi phân  $y'' + 2y' - 3y = e^x \cos x + 3xe^x \sin x$  có dạng nghiệm riêng là

**A**  $y^* = e^x [(Ax + B) \cos x + (Cx + D) \sin x]$ .     
  **B**  $y^* = xe^x [(Ax + B) \cos x + (Cx + D) \sin x]$ .  
 **C**  $y^* = e^x (A \cos x + B \sin x)$ .     
  **D**  $y^* = xe^x (A \cos x + B \sin x)$ .

**Câu 24.** Phương trình vi phân  $y'' - 2y' + 2y = e^x [(x^2 + 1) \cos x + x \sin x]$  có dạng nghiệm riêng là

**A**  $y^* = e^x [(Ax + B) \cos x + (Cx + D) \sin x]$ .

Ⓑ  $y^* = xe^x [(Ax + B) \cos x + (Cx + D) \sin x]$ .

Ⓒ  $y^* = e^x [(Ax^2 + Bx + C) \cos x + (Dx^2 + Ex + F) \sin x]$ .

Ⓓ  $y^* = xe^x [(Ax^2 + Bx + C) \cos x + (Dx^2 + Ex + F) \sin x]$ .

**Câu 25.** Phương trình vi phân  $y'' - 6y' + 25y = 2 \sin x + 3 \cos x$  có nghiệm tổng quát là

Ⓐ  $y = e^{3x} (C_1 \cos 4x + C_2 \sin 4x) + \frac{1}{51} (14 \cos x + 5 \sin x)$ .

Ⓑ  $y = e^{3x} (C_1 \cos 4x + C_2 \sin 4x) + \frac{1}{102} (14 \cos x + 5 \sin x)$ .

Ⓒ  $y = e^{4x} (C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x) + \frac{1}{51} (14 \cos x + 5 \sin x)$ .

Ⓓ  $y = e^{4x} (C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x) + \frac{1}{102} (14 \cos x + 5 \sin x)$ .

———— HẾT ————

**ĐÁP ÁN CHƯƠNG 1**

- |       |       |       |       |       |       |       |       |       |       |
|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| 1. A  | 2. B  | 3. B  | 4. C  | 5. A  | 6. B  | 7. D  | 8. D  | 9. B  | 10. A |
| 11. C | 12. C | 13. D | 14. C | 15. A | 16. C | 17. B | 18. B | 19. A | 20. C |
| 21. B | 22. B | 23. C | 24. B | 25. D | 26. C |       |       |       |       |

**ĐÁP ÁN CHƯƠNG 2**

- |       |       |       |       |       |       |       |       |       |       |
|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| 1. B  | 2. C  | 3. A  | 4. B  | 5. A  | 6. A  | 7. A  | 8. D  | 9. A  | 10. B |
| 11. D | 12. A | 13. A | 14. A | 15. A | 16. C | 17. A | 18. A | 19. C | 20. B |
| 21. A | 22. A | 23. D | 24. B | 25. A |       |       |       |       |       |

**ĐÁP ÁN CHƯƠNG 3**

- |       |       |       |       |       |       |       |       |       |       |
|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| 1. B  | 2. C  | 3. D  | 4. B  | 5. D  | 6. C  | 7. A  | 8. B  | 9. C  | 10. B |
| 11. B | 12. C | 13. A | 14. C | 15. D | 16. B | 17. C | 18. B | 19. C | 20. C |
| 21. D | 22. C | 23. A | 24. A | 25. A |       |       |       |       |       |

**ĐÁP ÁN CHƯƠNG 4**

- |       |       |       |       |       |       |       |       |       |       |
|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| 1. B  | 2. D  | 3. A  | 4. C  | 5. C  | 6. B  | 7. D  | 8. D  | 9. D  | 10. A |
| 11. B | 12. D | 13. C | 14. A | 15. B | 16. A | 17. B | 18. D | 19. B | 20. C |
| 21. D | 22. C | 23. A | 24. D | 25. B |       |       |       |       |       |