CÂU HỎI ÔN TẬP TRẮC NGHIỆM - TOÁN KỸ THUẬT CHO KHỐI CNTT-ĐĐT

BÀI TẬP: NHẬN BIẾT

1. Trong không gian $\mathbb{R}^n$ với tích vô hướng Euclid, công thức tính chuẩn của vector $u = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ là:

   A. $\|u\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}$

   B. $\|u\| = x_1 + x_2 + \cdots + x_n$

   C. $\|u\| = x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2$

   D. $\|u\| = \max(|x_1|, |x_2|, \dots, |x_n|)$

2. Trong quá trình Gram-Schmidt cho hệ $\{u_1, u_2\}$, vector trực giao đầu tiên v_1 được chọn là:

   A. $v_1 = u_1$

   B. $v_1 = u_1 + u_2$

   C. $v_1 = 0$

   D. $v_1 = u_1 - u_2$

3. Trong phân tích SVD ($A = U\Sigma V^T$), các phần tử trên đường chéo của Σ gọi là:

   A. Các giá trị kỳ dị (Singular values)

   B. Các trị riêng (Eigenvalues)

   C. Các hệ số Fourier

   D. Các giá trị suy biến

4. Tập hợp $C \subset \mathbb{R}^n$ được gọi là tập lồi nếu với mọi $u, v \in C$ và mọi $\lambda \in [0, 1]$, ta luôn có:

   A. $(1 - \lambda)u + \lambda v \in C$

   B. $(1 - \lambda)u - \lambda v \in C$

   C. $u + v \in C$

   D. $\lambda u \in C$

5. Hàm số f xác định trên tập lồi C được gọi là hàm lồi nếu với mọi $u, v \in C$ và $\lambda \in [0, 1]$ ta có:

A. $f((1-\lambda)u+\lambda v) \le (1-\lambda)f(u)+\lambda f(v)$

B. $f((1-\lambda)u+\lambda v) \ge (1-\lambda)f(u)+\lambda f(v)$

C. $f(u+v) = f(u)+f(v)$

D. $f(\lambda u) = \lambda f(u)$

6. Nếu hàm số f có ma trận Hessian $\nabla^2 f(x)$ là ma trận nửa xác định dương với mọi x, thì f là:

A. Hàm lồi

B. Hàm lõm

C. Hàm hằng

D. Hàm không liên tục

BÀI TẬP: THÔNG HIỂU VÀ VẬN DỤNG (2-3 BƯỚC)

41. Cho hệ vector $\{u_1 = (1,1), u_2 = (0,2)\}$. Sử dụng Gram-Schmidt, vector trực giao v_2 (chưa chuẩn hóa) là:

A. $v_2 = (-1,1)$

B. $v_2 = (1,-1)$

C. $v_2 = (0,2)$

D. $v_2 = (1,1)$

42. Tìm các giá trị kỳ dị (singular values) của ma trận $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$:

A. 3 và 2

B. 3 và -2

C. 9 và 4

D. $\sqrt{3}$ và $\sqrt{2}$

43. Nếu $A = U\Sigma V^T$ là phân tích SVD của A, thì $A^T A$ tương đương với:

A. $V\Sigma^2 V^T$

B. $U\Sigma^2 U^T$

C. $V\Sigma V^T$

D. $U\Sigma V^T$

44. Cho $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$. Ma trận này có chéo hóa trực giao được không? Vì sao?

A. Có, vì A là ma trận đối xứng.

B. Không, vì $\det(A) = 0$.

C. Có, vì A có các hàng tỉ lệ.

D. Không, vì A không phải ma trận đơn vị.

45. Xét tập $C = \{(x, y) \mid y \geq x^2\}$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. C là tập lồi vì nó là vùng phía trên của một parabol ngửa.

B. C không lồi vì đường biên là đường cong.

C. C là một siêu phẳng.

D. C là một đa diện.

46. Gradient của hàm $f(x, y) = x^2y + \sin(x)$ tại $(0, 1)$ là:

A. $(1, 0)$

B. $(0, 1)$

C. $(1, 1)$

D. $(2, 0)$

47. Hàm $f(x, y) = x^2 + 4xy + 2y^2$ có lồi trên $\mathbb{R}^2$ không?

A. Không, vì định thức của Hessian là $8 - 16 = -8 < 0$.

B. Có, vì các phần tử đường chéo của Hessian đều dương.

C. Có, vì nó là đa thức bậc hai.

D. Không, vì nó có chứa tích xy.

BÀI TẬP: VẬN DỤNG (TỪ 3 BƯỚC TÍNH TOÁN)

81. Ma trận nào sau đây là ma trận trực giao?

A. $A = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$

B. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

C. $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

D. $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

82. Thực hiện trực chuẩn hóa Gram-Schmidt cho hệ $\{u_1 = (1, 1, 0), u_2 = (0, 1, 1)\}$. Vector trực chuẩn thứ hai q_2 là:

A. $q_2 = (-\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}})$

B. $q_2 = (0, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$

C. $q_2 = (-1, 1, 2)$

D. $q_2 = (1, 0, 1)$

83. Cho ma trận $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Phân tích SVD $A = U\Sigma V^T$ có ma trận Σ là:

A. $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

B. $\begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

C. $\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

D. $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

84. Xét tính lồi của hàm $f(x, y) = x^4 + y^4$. Ma trận Hessian tại (x, y) là:

A. $\text{diag}(12x^2, 12y^2)$, hàm luôn lồi trên $\mathbb{R}^2$.

B. $\text{diag}(4x^3, 4y^3)$, hàm không lồi.

C. $\text{diag}(12x^2, 12y^2)$, hàm chỉ lồi khi $x, y > 0$.

D. Ma trận không xác định dấu.

85. Tìm cực tiểu toàn cục của hàm lồi $f(x, y) = x^2 + 2y^2 - 4x + 4y$:

A. $(2, -1)$

B. $(-2, 1)$

C. $(0, 0)$

D. $(2, 1)$

86. Ma trận Hessian của hàm $f(x, y) = e^{x^2+y^2}$ tại gốc tọa độ $(0, 0)$ là:

A. $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

B. $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

C. $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

D. $\begin{pmatrix} e & 0 \\ 0 & e \end{pmatrix}$

87. Hàm $f(x, y) = -\ln(1 - x - y)$ xác định trên tập nào để là hàm lồi?

A. $\{(x, y) \mid x + y < 1\}$

B. $\{(x, y) \mid x + y > 1\}$

C. Toàn bộ $\mathbb{R}^2$

D. $\{(x, y) \mid x, y > 0\}$

BÀI TẬP: VẬN DỤNG CAO (KẾT HỢP LÝ THUYẾT VÀ BIẾN ĐỔI)

121. Cho ma trận $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Tìm giá trị riêng lớn nhất σ_1 của A:

A. $\sqrt{3}$

B. 3

C. $\sqrt{2}$

D. 2

122. Nếu u là vector riêng ứng với trị riêng λ của $A^T A$, thì giá trị riêng tương ứng của A là $\sigma = \sqrt{\lambda}$. Vector riêng trái tương ứng u (trong ma trận U) được xác định bởi:

A. $\frac{1}{\sigma} Au$

B. Au

C. $\frac{1}{\lambda} Au$

D. $A^T u$

123. Tìm ma trận Hessian của hàm $f(x, y) = \ln(e^x + e^y)$. Tại điểm $(0, 0)$, ma trận này là:

A. $\begin{pmatrix} 1/4 & -1/4 \\ -1/4 & 1/4 \end{pmatrix}$

B. $\begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix}$

C. $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

D. $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

124. Điểm x thỏa mãn $\nabla f(x) = 0$ và $\nabla^2 f(x)$ nửa xác định dương. Đây là điều kiện:

A. Cần cấp hai để x là điểm cực tiểu địa phương.

B. Đủ để x là điểm cực tiểu địa phương.

C. Đủ để x là cực tiểu toàn cục.

D. Cần cấp một để x là điểm yên ngựa.

125. Ma trận nào sau đây nửa xác định dương nhưng không xác định dương?

A. $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

B. $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

C. $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

D. $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$